10класс

10.1. Даны две квадратичные функции $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$. Оказалось, что функция $f(x)+g(x)$ имеет единственный корень. Докажите, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.

Решение. См. задачу 9.2.

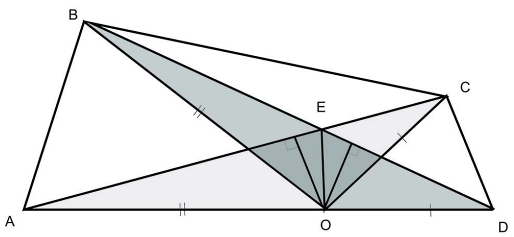
10.2. Докажите, что в любом пифагоровом треугольнике есть сторона, длина которой делится на 5 (пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целыми сторонами).

Решение. Заметим, что остатки при деления на 5 квадратов целых чисел могут принимать значения либо 0, либо 1, либо 4. Если предположить, от противного, что длины сторон *a,b,c* пифагорова треугольника не делятся на 5, то из теоремы Пифагора $a^2+b^2=c^2$, и мы получаем противоречие: действительно, квадраты катетов должны давать одинаковые остатки (либо 1, либо 4) при делении на 5 (иначе сумма квадратов катетов делится на 5, и значит, длина гипотенузы делится на 5), но в таком случае сумма квадратов даст остаток либо 2, либо 3, а такого остатка не может быть у квадрата гипотенузы.

10.3. 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает).

Решение. Сначала покажем, что найдется игрок, одержавший не менее семи побед. Действительно, в противном случае общее число побед всех игроков было бы не более $14\cdot 6=84$. Но общее число побед равно числу всех сыгранных партий, то есть равно $(14\cdot 13)/2=91$ – противоречие. Выберем теннисиста, скажем, А, одержавшего не менее 7 побед. Удалим (временно из рассмотрения) А и семерых, проигравших ему. Останется группа из 6 теннисистов. Рассуждая аналогично, в этой группе найдем игрока В, который выиграл не менее трёх партий у игроков из этой группы. Если убрать из рассмотрения В и троих, проигравших ему, останутся два теннисиста. Из этих двоих выберем того, скажем, С, кто победил другого. Тогда тройка игроков А,В,С будет искомой по построению (первые семеро, удаленные из рассмотрения, проиграли А, удаленная группа из троих проиграла В, и последний проиграл С).

10.4.На стороне *AD* выпуклого четырёхугольника *ABCD* отмечена точка O. Оказалось, что *AO=BO, CO=OD* и $\angle BOA=\angle COD$. Пусть *E* – точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что *EO* – биссектриса угла *AED*.



Решение. Треугольники *AOC* и *BOD* равны по двум сторонам (*AO=BO, CO=OD*) и углу между ними, т.к. из равенства углов $\angle BOA=\angle COD$ следует равенство смежных углов $\angle BOD=\angle AOC$. Поэтому у треугольников равны соответствующие высоты, и значит, высоты, опущенные из вершины *O* на равные стороны *AC* и *BD*, равны между собой. Следовательно, точка *O* равноудалена от вершин угла *AED* и поэтому она лежит на биссектрисе угла *AED*.

10.5. Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

Решение. См. задачу 9.5.