

Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»

1 тур. 10.11.2018
11 класс

- 11.1** Докажите неравенство $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha \geq 1/4$ для любых α .
- 11.2** Какого наибольшего значения может достигать отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности прямоугольного треугольника?
- 11.3** Из 25 натуральных чисел $1, 2, \dots, 25$ требуется выбрать несколько различных чисел и расположить их по кругу так, чтобы сумма квадратов любых трех подряд идущих чисел делилась на 10. Можно ли выбрать **а)** 8 чисел?; **б)** 9 чисел?
- 11.4 а)** Прямоугольник площади 2018 расположен на координатной плоскости так, что его стороны параллельны координатным осям, а все четыре вершины лежат внутри разных квадрантов и имеют целочисленные координаты. Найдите длину его диагонали. **б)** Существует ли прямоугольник площади 2018 с целочисленными вершинами внутри разных квадрантов, у которого стороны не параллельны координатным осям?

1 тур. 11.11.2018
11 класс

- 11.1** При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 6ax - 2 + 2a + 9a^2 = 0$ имеет хотя бы один отрицательный корень?
- 11.2** Решите уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = 2^{x+3} + 2^{-x}$.
- 11.3** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Оказалось, что все треугольники ABM , BCM , CDM и DAM равнобедренные. Докажите, что среди отрезков AM , BM , CM и DM найдутся хотя бы два одинаковых по длине.
- 11.4 а)** Докажите, что существует возрастающая геометрическая прогрессия, из которой можно выбрать три члена (не обязательно соседние), образующие арифметическую прогрессию. **б)** Может ли знаменатель такой геометрической прогрессии быть рациональным числом?