Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
1 тур. 10.11.2018

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 тур. 10.11.2018
9 класс

9.1 Средний возраст учительского коллектива школы, состоящего из 20 учителей, равнялся 49 годам. Когда в школу пришел еще один учитель, средний возраст стал равен 48 годам. Сколько лет новому учителю?

Ответ. 28 лет. **Решение.** См. задачу 8.1.

9.2 Дан треугольник, у которого все стороны меньше единицы. Докажите, что существует содержащий его равнобедренный треугольник, все стороны которого также меньше единицы.

Решение. См. задачу 8.2.

9.3 Можно ли переставить цифры в 30-значном числе 11…122…233…3 (в котором 10 единиц, 10 двоек и 10 троек) так, чтобы получился квадрат натурального числа?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Сумма цифр этого числа равна 60 и она не изменится при любых перестановках цифр. Поскольку 60 делится на 3, но не делится на 9, то предположив противное, а именно, что существует натуральное n, квадрат которого имеет сумму цифр 60, и используя признаки делимости на 3 и на 9, придём к противоречию: n должно делиться на 3, а n^2 не делится на 9.

9.4 Докажите, что если площадь выпуклого четырехугольника равна произведению его средних линий, то его диагонали равны между собой (средняя линия – это отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

Решение. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник и точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Тогда $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD: этот известный факт следует из равенств отрезков $A_1B_1=C_1D_1$ и $B_1C_1=D_1A_1$, которые равны половине диагоналей AC и BD соответственно, по свойству средних линий. Площадь $A_1B_1C_1D_1$ равна половине площади $ABCD$ поскольку $S_{A_1BB_1}+S_{D_1DC_1}=\frac{1}{4}(S_{ABC}+S_{ADC})=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ и, аналогично, $S_{AA_1D_1}+S_{CC_1B_1}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$, а поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Таким образом, по условию задачи площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ равна половине произведения его диагоналей A_1C_1 и B_1D_1. Поэтому эти диагонали перпендикулярны. (Это следует из формулы для площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ с общим основанием A_1C_1). Значит $A_1B_1C_1D_1$ – ромб, а диагонали AC и BD четырехугольника вдвое больше стороны этого ромба.

1 тур. 11.11.2018

9 класс

9.1 Докажите, что при всех натуральных n число $n^3+6n^2+12n+7$ является составным.

Решение. Представим выражение в виде $(n+2)^3-1=(n+1)(n^2+5n+7)$, где, очевидно, каждый сомножитель больше 1.

9.2 Докажите неравенство $|a+1|\le a^2-a+2$.

Решение. При $a\ge -1$ неравенство приводится к виду $(a-1)^2\ge 0$, а при $a<-1$ – к виду $a^2+3\ge 0$.

9.3 На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1, A_1 и B_1 такие, что C_1 – середина AB и $\angle B_1C_1A_1=\angle C,\ \angle C_1A_1B_1=\angle A,\ \angle A_1B_1C_1=\angle B.$ Обязательно ли точки A_1 и B_1 тоже являются серединами соответствующих сторон?

Ответ: не обязательно**. Решение.** См. задачу 8.3**.**

9.4 а) Даны натуральные числа a и b, такие, что $3a+b$ и $3b+a$ дают одинаковые остатки при делении на 10. Верно ли, что сами числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 10? **б**) Верно ли, что натуральные числа a, b и c дают одинаковые остатки при делении на 10, если три числа $2a+b$, $2b+c$ и $2c+a$ дают одинаковые остатки при делении на 10?

Ответ: а) не верно**; б)** верно. **Решение.** См. задачу 8.4**.**