Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
1 тур. 10.11.2018

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 тур. 10.11.2018
8 класс

8.1 Средний возраст учительского коллектива школы, состоящего из 20 учителей, равнялся 49 годам. Когда в школу пришел еще один учитель, средний возраст стал равен 48 годам. Сколько лет новому учителю?

Ответ. 28 лет. **Решение**. До прихода нового учителя суммарный возраст учителей был равен 49·20=980. Потом суммарный возраст стал равен 48·21=1008. Значит, новому учителю 1008–980=28 лет.

8.2 Дан треугольник, у которого все стороны меньше единицы. Докажите, что существует содержащий его равнобедренный треугольник, все стороны которого также меньше единицы.

Решение. Рассмотрим в треугольнике ABC тот из углов, который не превосходит 60 градусов (такой угол существует, т.к. сумма всех трёх углов равна 180 градусам). Пусть, для определенности, это будет угол. A и $AB \le AC$. Отложим на луче AB точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Тогда равнобедренный треугольник AB_1C будет искомым, поскольку он содержит треугольник ABC и сторона B_1C меньше единицы: это следует из того факта, что угол A при вершине треугольника AB_1C не превосходит углов при основании, а значит против угла A не может лежать большей стороны, чем AC.

8.3 В коробке 25 цветных карандашей. Известно, что среди любых пяти карандашей найдутся хотя бы два карандаша одного цвета. Докажите, что в коробке найдется семь карандашей одного цвета.

Решение. См. задачу 7.4.

8.4 На клетчатом листе бумаги размером 60×70 клеток (по горизонтали и вертикали соответственно) Лена начертила систему координат (начало – в центре листа, ось x – горизонтальная, ось y – вертикальная, оси проведены до границ листа) и построила график y=0,83x. Затем Лена закрасила все клетки, через которые проходит график, т.е. клетки, внутри которых есть точки графика. Сколько всего закрашенных клеток?

Ответ. 108. **Решение**. График проходит в первом и третьем квадрантах. Подсчитаем число закрашенных клеток в первом квадранте (в третьем их будет столько же, т.к. график это прямая, проходящая через начало координат, и значит, центрально симметричная). График пересекает 29 вертикальных прямых сетки: x=1, x=2, …, x=29 (внутри квадранта) и 24 горизонтальных прямых: y=1, y=2, …, y=24 (т.к. при x=30 значение y=24,9). Заметим также, что точки пересечения с этими прямыми не являются узлами сетки, т.к. 0,83x не является целым числом при x=1, 2, …,29, поскольку 83 – простое число. Таким образом, внутри квадранта всего 29+24=53 точки пересечения с линиями сетки, а отрезков в первом квадранте, на которые разбивается график этими точками, получится 54. Каждый такой отрезок соответствует закрашиваемой клетке (которой он принадлежит). Итого, в обоих квадрантах будет 108 закрашенных клеток.

1 тур. 11.11.2018

8 класс

8.1 В книжном магазине Васю и Толю заинтересовала одна книга. Для ее покупки у Васи не хватало 150 рублей, а у Толи 200 рублей. Когда Вася попросил взаймы у Толи половину его наличности, Вася смог купить книгу и у него еще осталось 100 рублей на проезд. Сколько стоила книга?

Ответ. 700 рублей. **Решение.** См. задачу 7.1

8.2 Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Решите уравнение $n+s(n)=2018$.

Ответ: $n=2008$. **Решение.** Поскольку $n<2018$, то $s(n)<2+9+9+9=29$. Значит, $n>2018-29=1989$, т.е. n записывается в виде $\overline{199x}$ или $\overline{200x}$ или $\overline{201x}$ где x – некоторая цифра. В первом случае имеем уравнение $1990+x+19+x=2018$, которое даёт нецелое значение x. Аналогично, в третьем случае уравнение $2010+2x+3=2018$ даёт нецелое x. Во втором случае уравнение $2000+2x+2=2018$ даёт $x=8$, т.е. $n=2008$.

8.3 На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1, A_1 и B_1 такие, что C_1 – середина AB и $\angle B_1C_1A_1=\angle C$, $\angle C_1A_1B_1=\angle A$, $\angle A_1B_1C_1=\angle B$. Обязательно ли точки A_1 и B_1 тоже являются серединами соответствующих сторон?

Ответ: не обязательно**.** **Решение.** Рассмотрим такой пример: пусть ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом C. Из середины гипотенузы C_1 проведём две взаимно перпендикулярные прямые (под углом к гипотенузе, отличным от 45°). Тогда точки пересечения с катетами (точки A_1 и B_1) не будут серединами катетов, в то время, как треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный и равнобедренный. Действительно, рассмотрим треугольники B_1C_1C и A_1C_1B; они равны, т.к. $CC_1=BC_1$ (= половине гипотенузы); $\angle B_1CC_1=\angle A_1BC_1=45°$ и $\angle B_1C_1C=\angle A_1C_1B$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому $B_1C_1=A_1C_1$.

8.4 а) Даны натуральные числа a и b, такие, что $3a+b$ и $3b+a$ дают одинаковые остатки при делении на 10. Верно ли, что сами числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 10? **б**) Верно ли, что натуральные числа a, b и c дают одинаковые остатки при делении на 10, если известно, что числа $2a+b$, $2b+c$ и $2c+a$ дают одинаковые остатки при делении на 10?

Ответ: а) не верно**; б)** верно. **Решение. а)** Можно рассмотреть, например, $a=1$ и $b=6$, тогда оба числа $3a+b$ и $3b+a$ оканчиваются на 9. **б**) Пусть $s=a+b+c$. Уменьшая каждое из чисел $2a+b$, $2b+c$ и $2c+a$ на s, получим числа $a-c$, $b-a$, $c-b$ (некоторые из них могут быть отрицательными), причём у этих чисел одинаковый остаток, скажем x, при делении на 10. Заметим, что сумма чисел $a-b$, $b-c$, $c-a$ равна нулю, а с другой стороны, сумма их остатков при делении на 10 равна $3x$. Значит, $x=0$.