Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур. 2019

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/\!2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

8 класс

8.1. Даны два прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами. Горизонтальная сторона второго прямоугольника на 11% больше горизонтальной стороны первого, а вертикальная сторона второго прямоугольника на 10% меньше вертикальной стороны первого. **а**) У какого из прямоугольников площадь больше и на сколько процентов? **б**) Найдите отношение сторон первого прямоугольника, если известно, что его периметр на 5% меньше периметра второго.

<u>**Ответ**</u>: **а**) площадь второго прямоугольника меньше площади первого на 0,1%, **б**) отношение горизонтальной стороны к вертикальной равно $290/109 \approx 2{,}66$. **Решение.** Пусть a и b – соответственно, горизонтальная и вертикальная стороны первого прямоугольника, тогда стороны второго прямоугольника равны $1{,}11a$ и $0{,}9b$. Площадь второго прямоугольника равна $1{,}11a \cdot 0{,}9b = 0{,}999ab$, что в процентном отношении составляет $0{,}999ab/ab = 99{,}9\%$, т.е. на 0,1% меньше площади первого прямоугольника. **б)** Периметр второго прямоугольника равен $2\cdot(1{,}11a+0{,}9b)$ и по условию, периметр первого прямоугольника, т.е. $2a+2b$, равен $0{,}95\cdot 2\cdot(1{,}11a+0{,}9b)$. Приравняв эти две величины, получим $0{,}145b = 0{,}0545a$, т.е. $a/b = \frac{290}{109} \approx 2{,}66$. *Комментарий*. Отметим, что условие задачи о том, что периметр первого прямоугольника на 5% меньше периметра второго, не означает, что периметр второго прямоугольника на 5% больше периметра первого, а при таком несколько отличающемся условии ответ был бы $a./b = 2{,}5$.

,

8.2. **а**) Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел m и n так, чтобы $0{,}07=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать? **б**) Сможет ли его коллега, агент 013, подобным образом зашифровать свой номер?

<u>Ответ</u>: **а**) сможет; **б**) сможет. **Решение** следует из равенств**:** $0{,}07=0{,}05+0{,}02=\frac{1}{20}+\frac{1}{50}$ и $0{,}13=\frac{25}{200}+\frac{1}{200}=\frac{1}{8}+\frac{1}{200}$

8.3. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A – полтора часа. Найдите время от начала движения до встречи и отношение скоростей велосипедистов.

<u>Ответ.</u> Время до встречи – 1 час. Скорость первого велосипедиста больше скорости второго в 1,5 раза.

<u>Решение</u>. Пусть v_1, v_2 – скорости велосипедистов, t – время до встречи. Тогда первый велосипедист проехал до встречи путь v_1t, а второй – путь v_2t. Из условий задачи тогда будем иметь $\frac{v_2t}{v_1}=40$ (мин.) и $\frac{v_1t}{v_2}=90$ (мин.). Из этих уравнений получим, исключая t, что $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2=\frac{9}{4}$, т.е. $\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}$. Тогда значение t = 60 (мин).

8.4. В треугольнике ABC угол A в три раза меньше угла C, а сторона BC вдвое меньше стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

<u>Ответ.</u> Углы A, B и C равны соответственно $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. **Решение.** Пусть $BC=a$, $\angle A=\alpha$, тогда $AB=2a$ и $\angle C=3\alpha$. Возьмём точку M на стороне AB такую, что $\angle ACM=\alpha$, тогда $\angle BMC=2\alpha$ по свойству внешнего угла. Таким образом, $\angle BCM=3\alpha-\alpha=2\alpha$ и значит, треугольник BMC равнобедренный. Тогда $BM=a$ и $AM=2a-a=a$, и поэтому $CM=AM=a$, т.к. треугольник AMC равнобедренный. Итак, треугольник BMC равносторонний и значит, все его углы равны 60° ($=2\alpha$). Остальные углы теперь легко определяются.

8.5. Можно ли клетчатый квадрат $n\times n$ (клеток) с вырезанной угловой клеткой разрезать на доминошки (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных доминошек было одинаковым, если **а**) n=101; **б**) n=99?

<u>Ответ.</u> **а)** Можно; **б**) нельзя. **<u>Решение.</u>** **а)** Пусть отрезана левая нижняя клетка. Заполним нижнюю горизонталь (без вырезанной клетки) 50 горизонтальными доминошками, а левую вертикаль – 50 вертикальными доминошками. Останется квадрат 100×100, который разбивается на четное число квадратиков 2×2 (а именно, на 2500 таких квадратиков), половину из которых заполним горизонтальными, а половину – вертикальными доминошками. **б**) См. аналогичную раскраску в задаче 7.5. Те же рассуждения приводят к противоречию, т.к. белых клеток нечетное количество (а именно, $49\cdot99=4851$), а количество доминошек каждого цвета должно быть четным (а именно, $(99^2-1)/4=2450$).

,