Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
1 тур. 10.11.2018

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
–. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
– **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 тур. 10.11.2018
7 класс

7.1 У прямоугольника длина на 25% больше ширины. Прямым разрезом, параллельным меньшей стороне, этот прямоугольник разрезали на квадрат и прямоугольную полоску. На сколько процентов периметр квадрата больше периметра полоски?

Ответ. На 60%. **Решение.** Пусть a – ширина прямоугольника, тогда его длина $1{,}25a$. Периметр получившегося квадрата $4a$, а периметр полоски $2a+0{,}5a = 2{,}5a$. Отношение периметров $4a : 2{,}5a = 1{,}6$. Значит, периметр квадрата больше периметра полоски на $0{,}6 \cdot 100\% = 60\%$

7.2 Можно ли из первых ста натуральных чисел выбрать 8 чисел так, чтобы их сумма делилась на каждое из них?

Ответ. Можно. **Решение.** Можно привести такой пример искомых чисел 1; 2; 3; 6; 12; 24; 48; 96. Здесь сумма 192 делится на каждое из чисел. Данный пример не единственный, можно привести и другие, например 1; 2; 3; 4; 5; 15; 30; 60 с суммой 120**.**

7.3 В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число

Ответ. 727 023. **Решение.** Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть y – последняя цифра исходного числа, x – пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно $10x+y-x=9x+y=654\,321$. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что y не превосходит 9), получим остаток $y=3$ и частное $x=72\,702$.

7.4 В коробке 25 цветных карандашей. Известно, что среди любых пяти карандашей найдутся хотя бы два карандаша одного цвета. Докажите, что в коробке найдется 7 карандашей одного цвета.

Решение. Из условия задачи следует, что карандаши имеют не более 4 цветов. Тогда, рассуждая от противного, получим, что найдутся 7 карандашей одного цвета: действительно, в противном случае всего карандашей было бы не более 6·4=24.

1 тур. 11.11.2018

7 класс

7.1 В книжном магазине Васю и Толю заинтересовала одна книга. Для ее покупки у Васи не хватало 150 рублей, а у Толи 200 рублей. Когда Вася попросил взаймы у Толи половину его наличности, Вася смог купить книгу и у него еще осталось 100 рублей на проезд. Сколько стоила книга?

Ответ. 700 рублей. **Решение.** Если x – цена книги, то у Васи было (x – 150) рублей, а у Пети (x – 200) рублей. Составив уравнение $x-150+\frac{x-200}{2}=x+100$ и решив его, находим x = 700.

7.2 В стакане находился раствор, в котором вода составляла 99%. Стакан с раствором взвесили, и вес оказался равен 500 гр. После этого часть воды испарилась, так что в результате доля воды составила 98%. Сколько будет весить стакан с получившимся раствором, если вес пустого стакана 300 гр.?

Ответ: 400 гр. **Указание**. Вначале вес раствора был равен 500 – 300 = 200 (гр)., а воды было $0.99\cdot 200=198$ (гр.), и значит, вещества было 200 – 198 = 2 (гр.). После выпаривания воды 2 гр. вещества составляют 100% – 98% = 2% от веса раствора, поэтому весь раствор весит 100 гр., а вместе со стаканом 400 гр.

7.3 Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Потом он позвонил Коле и спросил: "Чему равно n, если всего выписано 2018 цифр?" Коля сказал: "Пересчитай еще раз, ты ошибся". Кто из мальчиков прав?

Ответ. Коля прав. **Указание**. Если выписано 2018 цифр, то число n должно быть трехзначным: действительно, в случае двузначного n было бы выписано не более 9 + 2·90 = 189 цифр, а в случае четырехзначного (или более) – было бы выписано более 9 + 2·90 + 3·900 = 2889 цифр. Пусть k – количество выписанных трехзначных чисел (k = n – 99). Тогда общее количество выписанных цифр равно 9 + 2·90 + 3·k , поэтому оно не может равняться 2018 (т.к. 2018 не делится на 3).

7.4 Имеется n палочек длины 1, 2,…, n. Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат: **а**) при n=12; **б**) при n=15? (Требуется использовать все палочки).

Ответ. **а**) 2 палочки; **б)** Можно. **Решение.** а) Так как сумма 1 + 2 + … + 12 = 78 не делится на 4, то сложить квадрат нельзя. Сторона квадрата должна быть $\frac{78}{4}=19{,}5$. Если сломать только одну палочку, то ее части могут оказаться на двух разных сторонах квадрата, а другие две стороны не смогут иметь нецелую длину. Значит, надо сломать как минимум две палочки. С двумя сломанными палочками можно сложить квадрат. Например, сломаем пополам палочки длины 1 и 3. Тогда квадрат можно сложить так: ($\frac{1}{2}$ + 12 + 7), ($\frac{1}{2}$ + 11 + 8), ($\frac{3}{2}$ + 10 + 2 + 6), ($\frac{3}{2}$ + 9 + 5 + 4). **б**) Квадрат можно сложить, например, так: (15 + 14 + 1), (13 + 12 + 5), (11 + 10 + 9), (8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2).