Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
1 тур. 10.11.2018

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 тур. 10.11.2018
11 класс

11.1 Докажите неравенство $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha\ge 1/4$ для любых α.

Решение. Запишем левую часть неравенства как сумму кубов и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного угла: $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cdot((\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-3\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha\ge 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. (Другой способ доказательства основан на исследовании левой части неравенства как функции от α, при этом достаточно, в силу симметрии и периодичности, рассмотреть лишь промежуток от 0 до $\pi/2$. Минимум этой функции достигается при $\alpha=\pi/4$ и равен ¼).

11.2 Какого наибольшего значения может достигать отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности прямоугольного треугольника?

Ответ $\sqrt{2}-1$. **Решение.** Пусть c – гипотенуза и α – острый угол. Тогда $R=c/2$ и $r=(c\cos\alpha+c\sin\alpha-c)/2=(c\sqrt{2}\sin(\alpha+\pi/4)-c)/2\le c(\sqrt{2}-1)/2.$ Таким образом, наибольшее значение отношения r/R равно $\sqrt{2}-1$ и достигается при $\alpha=\pi/4$, т.е. для равнобедренного прямоугольного треугольника.

11.3 Из 25 натуральных чисел 1, 2, …, 25 требуется выбрать несколько различных чисел и расположить их по кругу так, чтобы сумма квадратов любых трех подряд идущих чисел делилась на 10. Можно ли выбрать **а**) 8 чисел?; **б**) 9 чисел?

Ответ. а) Нельзя, **б)** можно. **Решение. а)** Предположим, от противного, что такое расположение возможно**.** Возьмём соседние тройки чисел и вычтем из суммы квадратов первой тройки сумму квадратов второй. Получим, что квадрат каждого числа на круге даёт тот же остаток при делении на 10, что и квадрат числа, расположенного по кругу через два. (Другими словами, $(a_i)^2$ и $(a_{i+3})^2$ оканчиваются одной и той же цифрой при всех i.) «Прыгая» от любого числа на круге через два (на третье), мы обойдём весь круг (так как 8 взаимно просто с тройкой). Значит, квадраты всех восьми чисел оканчиваются одной и той же цифрой. Но в каждой десятке подряд идущих натуральных чисел есть не более двух чисел, квадраты которых оканчиваются одинаковой цифрой (а именно, такими парами являются числа, оканчивающиеся на 1 и 9, на 2 и 8, на 3 и 7, на 4 и 6). Поэтому от 1 до 25 будет не более 6 чисел с одинаковыми последними цифрами квадрата (точнее, их не более пяти, т.к. от 21 до 25 таких пар не будет.) Противоречие. **б**) Учитывая предыдущие рассуждения, нетрудно привести пример расположения 9 чисел: 1, 2, 5, 11, 12, 15, 21, 22, 25, для этого достаточно подобрать всего одну тройку с нужным свойством, а затем использовать периодичность с периодом 3.

11.4 а) Прямоугольник площади 2018 расположен на координатной плоскости так, что его стороны параллельны координатным осям, а все четыре вершины лежат внутри разных квадрантов и имеют целочисленные координаты. Найдите длину его диагонали. **б**) Существует ли прямоугольник площади 2018 с целочисленными вершинами внутри разных квадрантов, у которого стороны не параллельны координатным осям?

Ответ. а) $\sqrt{1018085}$; **б)** существует**. Решение.** См. задачу 10.4.

1 тур. 11.11.2018

11 класс

11.1 При каких значениях параметра *a* уравнение $x^2-6ax-2+2a+9a^2=0$ имеет хотя бы один отрицательный корень?

Ответ. $a<(-1+\sqrt{19})/9$. **Решение.** Условие задачи равносильно неравенству $3a-\sqrt{9a^2+2-2a-9a^2}<0$, т.е. $\sqrt{2(1-a)}>3a$. При $a<0$ последнее неравенство, очевидно, выполняется, т.к. левая часть имеет смысл и неотрицательна при $a\le 1$. При $a\ge 0$ правая часть неотрицательна и поэтому можно возвести обе части неравенства в квадрат, тогда будем иметь равносильное (для таких *a*) неравенство $2-2a-9a^2>0$. Решая его, получим $(-1-\sqrt{19})/9<a<(-1+\sqrt{19})/9$. Объединяя с решением для $a<0$, получаем ответ. **Другой способ решения** (более наглядный) основан на рассмотрении двух случаев в зависимости от знака абсциссы $x=3a$ вершины параболы $y=x^2-6ax-2+2a+9a^2$. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то в первом случае (при $a<0$) условие задачи равносильно тому, что ордината вершины отрицательна, т.е. $y(3a)<0$. Во втором случае (при $a\ge 0$) условие задачи равносильно неравенству $y(0)<0$, и мы приходим к тем же неравенствам, что и выше.

11.2 Решите уравнение $3\sin x+4\cos x=2^{x+3}+2^{-x}$.

Ответ: Нет корней. **Решение.** Левая часть уравнения при помощи введения вспомогательного угла приводится к виду $5\sin(x+\alpha)$. Значит, она не превосходит 5. Для правой части в. силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (для положительных чисел) будем иметь: $2^{x+3}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x+3}\cdot 2^{-x}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}>5$.

11.3 Дан выпуклый четырехугольник *ABCD* и точка *M* внутри него. Оказалось, что все треугольники *ABM, BCM, CDM* и *DAM* равнобедренные. Докажите, что среди отрезков *AM, BM, CM* и *DM* найдутся хотя бы два одинаковых по длине.

Решение. См. задачу 10.3.

11.4 а) Докажите, что существует возрастающая геометрическая прогрессия, из которой можно выбрать три члена (не обязательно соседние), образующие арифметическую прогрессию. **б**) Может ли знаменатель такой геометрической прогрессии быть рациональным числом?

Ответ. б) Не может. **Решение. а)** См. задачу 10.4а**. б)** Предположим, от противного, что такая геометрическая прогрессия существует, и пусть её первый член равен *b*, а знаменатель равен *q*, где $q>1$ – рациональное число. Пусть три числа bq^m, bq^n, bq^k образуют арифметическую прогрессию, где $m>n>k\ge 0$., *т.е.* $bq^m-2bq^n+bq^k=0$. Тогда *q* является рациональным корнем многочлена $q^{m-k}-2q^{n-k}+1$, но рациональными корнями такого многочлена могут быть только ± 1 (числитель – делитель свободного члена, знаменатель – делитель старшего коэффициента). Итак, приходим к противоречию с условием $q>1$.