Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур. 2019

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!\!/_2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $|x^3+1|=a(x+1)$ имеет три корня.

Ответ: ¾<a<3. **Решение**. Сразу исключим значение a=0, т.к. в этом случае единственный корень $x=-1$. Поскольку $x^2-x+1>0$ при всех x, уравнение можно записать в виде $|x+1|(x^2-x+1)=a(x+1)$. Корень $x=-1$ есть при любых a. Для $x\neq -1$ сократим уравнение на $(x+1)$. Получим уравнение $x^2-x+1=a\cdot sign(x+1)$, где $sign(\,)$ означает знак числа (в данном случае он равен +1 или -1, соответственно, при $x>-1$ или $x<-1$). Нам нужно найти значения a, при которых это уравнение имеет два корня, отличные от -1. При a<0 правая часть последнего уравнения положительна лишь при $x<-1$, но в силу того, что вершина параболы $y=x^2-x+1$ имеет абсциссу $1/2>-1$, квадратное уравнение не может иметь больше одного корня в области $x<-1$. Значит, требуется найти положительные a, для которых уравнение $x^2-x+1=a\cdot$имеет два корня, большие -1. Итак, требуется решить неравенство $(1-\sqrt{1-4(1-a)})/2>-1$ (с учетом положительности дискриминанта, т.е. подкоренного выражения, а также параметра a). Тогда $\sqrt{4a-3}\cdot<3$ и, значит, $0<4a-3<9 \Leftrightarrow 3/4<a<3$. *Комментарий* .Задача допускает и другие (графические) решения.

,

11.2. Даны коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена ax^2+bx+c. Его график пересекает оси координат в трёх точках, и через эти точки провели окружность, которая пересекла ось Oy ещё в одной точке. Найдите ординату этой четвертой точки.

Ответ: $1/a$. **Решение**. См. задачу 10.2

11.3. На боковых ребрах AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты, соответственно, точки A_1, B_1, C_1 такие, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию ABC. Точка D_1 лежит в основании. Докажите, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ не превосходит $\frac{4}{27}V$, где V – объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Из условия параллельности плоскостей $A_1B_1C_1$ и ABC следует, что тетраэдры $A_1B_1C_1D$ и $ABCD$ подобны. Пусть x – коэффициент подобия этих тетраэдров ($x<1$) и h – высота тетраэдра $ABCD$ из точки D. Тогда $h-xh$ – высота тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ из точки D_1. Поскольку площади оснований $A_1B_1C_1$ и ABC тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ относятся как x^2, а высоты – как $(1-x)$, получаем задачу на максимум для функции $y=x^2(1-x)$. Решая эту задачу с помощью производной $y'=2x-3x^2$.находим критическую точку $x_0=\frac{2}{3}$, в которой достигается наибольшее значение $y(x_0)=\frac{4}{27}$ (в другой критической точке x=0, так же, как и при x=1, очевидно, достигается .наименьшее значение 0).

11.4. Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение $|3x+2y|+|2x+y|=100$?

Ответ: 400. **Решение.** См задачу 10.4.

11.5. Существует ли такое действительное α, что оба числа $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ и $2\cos\alpha-\sqrt{3}$ рациональны?

Ответ: не существует **Решение.** Предположим, от противного, что для некоторого α выполняется: $2\sin\alpha+\sqrt{3}=a$ и $2\cos\alpha-\sqrt{3}=b$, где a, b – рациональные числа. Тогда $2\sin\alpha=a-\sqrt{3}$, $2\cos\alpha=b+\sqrt{3}$. Возводя в квадрат и складывая эти соотношения, получим $4=(a-\sqrt{3})^2+(b+\sqrt{3})^2=a^2+b^2+6+2\sqrt{3}(b-a)$. Если $b\neq a$, от отсюда уже получается противоречие, т.к. в левой части рациональное число, а в правой – иррациональное. Значит, $a=b$, и на самом деле мы имеем два уравнения $2\sin\alpha+\sqrt{3}=a$ и $2\cos\alpha-\sqrt{3}=a$. Вычитая эти уравнения, получим $2(\sin\alpha-\cos\alpha)=2\sqrt{3}$. Но функция $f(\alpha)=\sin\alpha-\cos\alpha$ принимает наибольшее значение $\sqrt{2}$ при $\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ (в этом можно убедиться, исследуя функцию с помощью производной или преобразовав данное выражение через вспомогательный угол). Таким образом, получаем противоречие (левая часть оказалась меньше правой).

,