Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
1 тур. 10.11.2018

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 тур. 10.11.2018
10 класс

10.1 Докажите неравенство $|a+1| - a^2 - 1 \le a$.

Решение. При $a \ge -1$ имеем неравенство $a + 1 \le a^2 + a + 1$, которое очевидно:$a^2 \ge 0$. При $a < -1$ имеем $-a - 1 \le a^2 + a + 1$, т.е.$(a+1)^2 + 1 > 0$. Таким образом, при всех a исходное неравенство верно.

10.2 Можно ли переставить цифры в 30-значном числе 11…122…233…3 (в котором 10 единиц, 10 двоек и 10 троек) так, чтобы получился квадрат натурального числа?

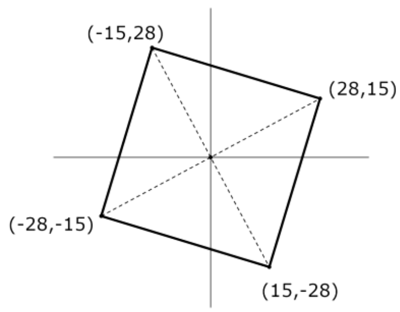
Ответ. Нельзя. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.3 Докажите, что если площадь выпуклого четырехугольника равна произведению его средних линий, то его диагонали равны между собой (средняя линия – это отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

Решение. См. задачу 9.4.

10.4 а) Прямоугольник площади 2018 расположен на координатной плоскости так, что его стороны параллельны координатным осям, а все четыре вершины лежат внутри разных квадрантов и имеют целочисленные координаты. Найдите длину его диагонали. **б**) Существует ли прямоугольник площади 2018 с целочисленными вершинами внутри разных квадрантов, у которого стороны не параллельны координатным осям?

Ответ. а) $\sqrt{1\,018\,085}$; **б)** существует**. Решение. а)** Так как вершины прямоугольника имеют целые координаты, а стороны параллельны осям, то длины сторон прямоугольника принимают целые значения. Из разложения на простые множители 2018= $2 \cdot 1009$ следует, что существует только два прямоугольника с такой площадью: а именно, прямоугольники со сторонами (1; 2018) и (2; 1009). Первый случай невозможен, так как вершины должны лежать в разных квадрантах, поэтому имеем единственный возможный прямоугольник (2;1009), его диагональ равна $\sqrt{2^2 + 1009^2} = \sqrt{1\,018\,085}$. **б)** См. рис. Построить пример квадрата можно, если найти точку с целочисленными координатами, расстояние от которой до начала координат равно $\sqrt{1009}$. Тогда, сделав последовательно повороты на 90° вокруг начала координат, получим вершины квадрата со стороной $\sqrt{2018}$. Искомая точка существует в силу общего свойства: простое число, дающее остаток 1 при делении на 4 (например, 1009), можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. В данном случае в этом можно убедиться непосредственно, подобрав пару чисел: $28^2+15^2=1009$ (перебор вариантов небольшой: для одного слагаемого надо рассмотреть целые числа, близкие к $\sqrt{1009}$).



1 тур. 11.11.2018

10 класс

10.1 Докажите неравенство $|a+1| \le a^2 - a + 2$.

Решение. См. задачу 9.2.

10.2 В компании из n человек надо распределить поровну 100 000 рублевых монет. Сколько существует различных значений n, для которых такое распределение возможно?

Ответ. 36. **Решение.** Подсчитаем количество натуральных делителей числа 100 000 $= 2^5 \cdot 5^5$. Любой такой делитель имеет вид $2^i \cdot 5^j$, где целые i, j могут принимать шесть значений: от 0 до 5. Тогда различных упорядоченных пар $(i; j)$ будет $6 \cdot 6 = 36$.

10.3 Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Оказалось, что все треугольники ABM, BCM, CDM и DAM равнобедренные. Докажите, что среди отрезков AM, BM, CM и DM найдутся хотя бы два одинаковых по длине.

Решение. Поскольку $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360°$, то хотя бы один из этих четырёх углов неострый. Пусть, для определенности, $\angle AMB \ge 90°$. Тогда $AB > AM$ и $AB > BM$. Значит, равными сторонами в $\Delta\, AMB$ являются AM и BM.

10.4 а) Докажите, что существует возрастающая геометрическая прогрессия, из которой можно выбрать три члена (не обязательно соседние), образующие арифметическую прогрессию. **б**) Может ли знаменатель такой геометрической прогрессии быть больше 1.9?

Ответ. б) Может. **Решение. а)** В качестве примера можно привести геометрическую прогрессию $1;\ q;\ q^2;\ q^3$, где $q=(1+\sqrt{5})/2$; для этой прогрессии выполняется равенство $1+q^3=2q^2$, которое с учетом $q \ne 1$ равносильно квадратному уравнению $q^2-q-1=0$. **б)** Пусть $1, q, q^2, \ldots, q^n, q^{n+1}$ –геометрическая прогрессия. Мы найдем такие $q>1.9$ и n, для которых три числа $1, q^n, q^{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. удовлетворяют соотношению $q^{n+1}-2q^n+1=0 \Leftrightarrow q^n(q-2)+1=0$. Возьмём $n=4$ и рассмотрим левую часть последнего равенства как многочлен пятой степени: $P(q)= q^4(q-2)+1$. При $q=1.9$ значение $P(1.9)<0$, т.к. $(1.9)^4>10$, а при $q=2$ значение $P(2)=1>0$. Значит, уравнение $P(q)=0$ имеет корень в интервале $(1.9; 2)$.