Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур. 2019

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

10 класс

10.1. Существует ли прямоугольник с иррациональными сторонами, у которого **а)** площадь и периметр – числа целые? **б**) площадь, периметр и диагональ – числа целые?

Ответ: **а**) существует; **б**) существует. **Решение**. Если стороны прямоугольника имеют вид $a = m + \sqrt{n},\ b = m - \sqrt{n}$, где m и n – натуральные числа, причем $n < m^2$ и n не является точным квадратом, то площадь прямоугольника равна $(m+\sqrt{n})(m-\sqrt{n}) = m^2 - n$, а периметр равен $4m$, и тем самым требования пункта а) выполнены. Для пункта б) требуется еще, чтобы диагональ $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2m^2+2n}$ была целым числом. Пусть $2m^2 + 2n = 4k^2$ для некоторого целого k. Тогда $n = 2k^2 - m^2$, и легко подобрать нужные числа, например, при $k = 3$ и $m = 4$ получим $n = 2$ и непосредственной проверкой убедимся, что стороны $4+\sqrt{2}$ и $4-\sqrt{2}$ соответствуют диагонали, равной 6.

10.2. Даны коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Его график пересекает оси координат в трёх точках, и через эти точки провели окружность, которая пересекла ось Oy ещё в одной точке. Найдите ординату этой четвертой точки.

Ответ: $1/a$. **Решение**. Рассмотрим сначала случай, когда парабола пересекает ось Ox в точках x_1, x_2 по одну сторону от точки O – начала координат. Если $a>0$, то $c>0$ и применяя для окружности теорему об отрезках секущей, получим, что искомая ордината y_0 удовлетворяет уравнению $y_0 \cdot c = x_1 x_2$. Но по теореме Виета $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, откуда получаем $y_0 = \frac{1}{a}$. Если a<0, то учитывая отрицательные знаки c и y_0, свойство секущих запишем в виде $(-y_0)\cdot(-c) = x_1 x_2$ и снова получим тот же результат $y_0 = \frac{1}{a}$. Если корни разных знаков, то вместо теоремы об отрезках секущей следует применить теорему об отрезках хорд, и тогда аналогично получим ту же формулу для y_0.

10.3. На боковых сторонах *AB* и *CD* трапеции *ABCD* взяты точки *M* и *N* соответственно, такие, что *AN*=*BN* и $\angle ABN = \angle CDM$. Докажите, что *CM*=*MD*.

Решение. Из равенства *AN* = *BN* следует, что $\angle ABN = \angle BAN$ в равнобедренном треугольнике *ABN*. Тогда по условию задачи $\angle CDN = \angle BAN$ и значит, около четырехугольника *AMND* можно описать окружность. Значит, $\angle MAD = 180° - \angle MND = \angle CNM$. Но в трапеции углы при боковой стороне дают в сумме 180° и поэтому $\angle MAD = 180° - \angle MBC$. Таким образом, в четырехугольнике *MBCN* сумма углов при вершинах *B* и *N* тоже равна 180° и поэтому около *MBCN* можно описать окружность. Следовательно, $\angle MCN = \angle MBN = \angle CDM$, а значит, треугольник *CMD* тоже равнобедренный, и *CM* = *MD*.

10.4. Сколько решений в целых числах *x, y* имеет уравнение $|3x+2y|+|2x+y|=100$?

Ответ: 400. **Решение**. Заметим, что для любых целых чисел a,b система уравнений $\begin{cases} 3x+2y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$ имеет целочисленное решение $\begin{cases} x=2b-a \\ y=2a-3b \end{cases}$, причем разным упорядоченным парам (a,b) соответствуют различные решения (x,y). Поэтому для любого натурального *n* от 1 до 99 взяв в качестве a,b числа вида $a=\pm n, b=\pm(100-n)$, получим $99\cdot 4=396$ решений. Кроме того, будет два решения, соответствующих числам $a=\pm 100, b=0$ и, аналогично, будет еще два решения, соответствующих числам $a=0, b=\pm 100$. Итого 400 решений.

10.5. Дан неравносторонний треугольник со сторонами *a*, *b*, *c*. Если существует треугольник со сторонами *a* + *b* – *c*, *b* + *c* – *a*, *a* + *c* – *b*, то с новым треугольником проделывают ту же процедуру, и т.д., в противном случае процесс заканчивается. **а**) Может ли в этом процессе встретиться треугольник, подобный исходному? **б)** Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Ответ: **а**) нет; **б**) нет. **Решение**. См. задачу 9.5

,