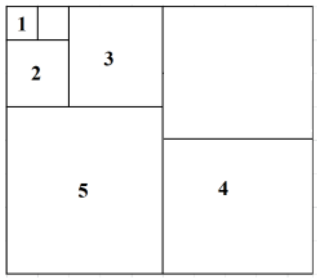
9 класс

9.1. В пятизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это четырёхзначное. В результате получили число 54321. Найдите исходное число.

Ответ: 60356. **Решение**. Пусть x – полученное после зачеркивания цифры четырехзначное число. Заметим, что зачеркнутая цифра была последней в пятизначном числе, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y. Имеем уравнение $10x + y - x = 54321 \Leftrightarrow 9x + y = 54321 = 9 \cdot 6035 + 6$. Значит, $x = 6035$ и $y = 6$ (частное и остаток при делении на 9 числа 54321).

9.2. Из прямоугольной таблицы $m \times n$ клеток требуется вырезать по линиям сетки несколько квадратов разного размера. Какое наибольшее количество квадратов можно вырезать, если: **а**) $m = 8$, $n = 11$; **б**) $m = 8$, $n = 12$?

Ответ: а) 5; **б**) 5. **Решение. а)** Заметим, что площадь шести разных квадратов не меньше $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91 > 88$. Таким образом, нельзя вырезать более пяти разных квадратов. Возможный пример для пяти квадратов (даже в прямоугольнике 8×9) см. на рисунке. **б)** Предположим, от противного, что можно вырезать 6 квадратов разного размера. Тогда это должны быть квадраты размеров 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 и 6×6. После отрезания квадрата 6×6 с одной стороны останется полоса ширины не более 2, а с другой стороны – ширины не более 6. Значит, квадраты 4×4 и 5×5 должны располагаться в полосе (не более) 6×8. Но после отрезания квадрата 5×5 из этой полосы в оставшейся части будут полоски ширины не более 3, и поэтому квадрат 4×4 разместить не удастся.



9.3. Найдите все простые числа p, для которых $p^2 + 200$ является квадратом целого числа.

Ответ: $p = 5$ или $p = 23$. **Решение**. Пусть $p^2 + 200 = a^2$, где a – натуральное число. Так как $p = 2$ не удовлетворяет уравнению, то искомое p, а значит и a, являются нечётными числа. Из равенства $(a - p)(a + p) = 200$, учитывая, что $a + p > a - p$ и оба множителя являются чётными числа, получаем три случая: 1) $a + p = 100$, $a - p = 2$; 2) $a + p = 50$, $a - p = 4$; 3) $a + p = 20$, $a - p = 10$. Находя p в каждом из этих случаев, а именно, 1) $p = 49$; 2) $p = 23$; и 3) $p = 5$, получаем два простых числа: $p = 5$ и $p = 23$.

9.4. Верно ли, что для любого нечётного $n > 3$ можно отметить (и обозначить) на плоскости точки A_1, $A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы n треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4, \ldots, A_nA_1A_2$ были остроугольными?

Ответ: верно **Решение.** Пусть $n = 2k + 1$, $k > 1$. Отметим вершины правильного $(2k + 1)$-угольника и пронумеруем их следующим образом: возьмем произвольную вершину A_1 и обозначим через A_2 k-ую по часовой стрелке от вершины A_1 вершину этого многоугольника. Аналогично, A_3 – это k-ая по часовой стрелке от вершины A_2 и т.д. (см. рис). Так как числа k и $2k + 1$ взаимно просты, то числа 1, $1 + k$, $1 + 2k$, …, $1 + ik$, …, $1 + 2k \cdot k$ дают различные остатки при делении на $2k + 1$. Таким образом, все вершины многоугольника будут пронумерованы. Несложно заметить, что все искомые треугольники – равнобедренные и равные между собой, поэтому они являются остроугольными.