8 класс

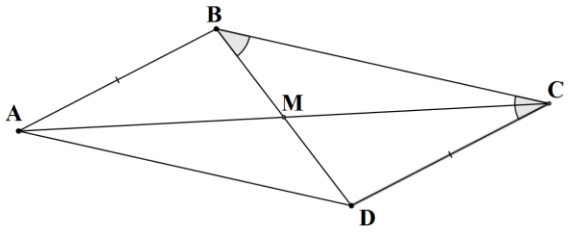
8.1. В 8а классе 52% девочек. Все ученики класса могут выстроиться в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Сколько учеников в классе?

Ответ: 25 учеников. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. Существуют ли три различных числа (среди них нет одинаковых), обладающих следующим свойством: если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится 100?

Ответ. Не существуют. **Решение.** См. решение задачи 7.2.

8.3. В треугольнике *ABC*проведена медиана *BM*. Стороны *AB* и *BC* составляют с медианой углы 100° и 40° соответственно, сторона *AB* равна 1. Найдите длину *BM*.



Ответ:$BM=1/2$. **Решение.** Отметим точку *D*, симметричную вершине *B*относительно точки *M*. Четырёхугольник *ABCD* является параллелограммом, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, $\angle BDC=\angle ABD=100^\circ$ и $\angle BCD=180^\circ-\angle DBC-\angle BDC=40^\circ$.Таким образом, треугольник*BDC*равнобедренный, а значит $2\cdot BM=BD=DC=AB=1$. Отсюда$BM=1/2$.(Можно получить результат, не рассматривая параллелограмм\, а вместо этого проведя через точку *M* среднюю линию, параллельную *BC* и подсчитав углы аналогично).

8.4. В 8 классе 30 человек, из них 22 посещают кружок французского языка, 21 – кружок немецкого языка и 18 – кружок китайского языка. Докажите, что в классе есть ученик, посещающий все три кружка.

Решение. Предположим, от противного, что нет ученика, посещающего три кружка. Пусть на каждом кружке все посещающие его ученики получили по значку. Тогда, с одной стороны, был роздан 22+21+18=61 значок. А с другой стороны,значков раздали не более $30\cdot 2=60$ штук, т.к. каждый ученик получил не более двух значков. Получили противоречие.

8.5. В равнобедренном треугольнике *ABC* боковые стороны *AB* и *BC* точками деления разделены на *n* и $n+1$ равных частей соответственно ($n > 1$). Из вершины *A* провели *n* отрезков в точки деления на стороне *BC*, а из вершины *C* – ($n-1$) отрезков в точки деления на стороне *AB*. Затем провели медиану из вершины *B*. **а)** Могут ли какие-то три из проведенных отрезков пересекаться в одной точке внутри треугольника *ABC*? **б)** На сколько всего частей разбивается треугольник *ABC* проведенными отрезками?

Ответ. **а**) не могут; **б**)n^2+3n. **Решение.** **а**) См. задачу 7.5. **б**) Обозначим точки деления $A=A_0, A_1, \ldots, A_n=B$и$C=C_0, C_1, \ldots, C_{n+1}=B$на сторонах *AB* и *CB* соответственно. Каждый из ($n+1$)треугольниковΔAC_iC_{i+1}($i=0,1,\ldots,n$) разбивается на *n* частей отрезками CA_i($i=1,\ldots,n-1$) Поэтому количество частей (пока не проведена медиана*BM*) будет равно $n\cdot(n+1)$. После проведения медианы никакие три отрезка не пересекаются одной точке, и поэтому отрезки, проведённые из вершин *A* и *C*, пересекают медиану ровно в $(n-1)+n=2n-1$ точках, т.е. на медиане образуется $(2n-1)+1=2n$отрезков деления. Каждый такой отрезок делит одну из подсчитанных ранее $n(n+1)$ частей треугольника *ABC* на две части. Таким образом,добавляется еще $2n$частей, и общее число частей равно $n(n+1)+2n=n^2+3n$.