Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки"
Математика. 16.12.2017 - 1 тур.

7 класс

7.1. Стороны прямоугольника относятся как 3:4, а его площадь численно равна периметру. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: 7/2, 14/3. **Решение**. Пусть x и y – стороны прямоугольника, тогда выполняются равенства $4x = 3y$ и $xy = 2(x+y)$. Выразив из первого равенства x и подставив во второе, получим (после деления на $y \neq 0$) $x = 7/2$, $y = 14/3$.

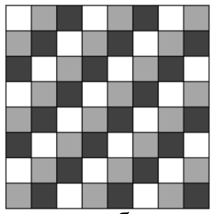
7.2. К восьмизначному числу 20172018 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72.

Ответ: 2201720184. **Решение**. Для делимости числа на 8 необходимо и достаточно, чтобы число, составленное из последних трёх цифр, делилось на 8. Таким образом, приписанная справа цифра может быть только четвёркой. По признаку делимости на 9 сумма цифр полученного числа должна делиться на 9. Значит, приписанная слева цифра должна быть равна 2.

7.3. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, у каждого из которых соседние цифры имеют разную чётность?

Ответ: 5625. **Решение.** Если первая цифра чётная, то её можно выбрать одним из четырёх способов (2, 4, 6, 8). А все последующие одним из пяти (1, 3, 5, 7, 9 – для второй и четвёртой цифры и 0,2,4,6,8 – для третей и пятой). В итоге (по правилу произведения) имеем всего $4 \cdot 5^4 = 2500$ чисел. Аналогично, в случае с нечётной первой цифрой получим $5^5 = 3125$ чисел. Итак, общее количество чисел равно 5625. **Замечание.** Можно получить тот же результат, если сразу воспользоваться правилом произведения. Первую (старшую) цифру можно выбрать девятью способами (взяв любую цифру, кроме 0), после этого вторую цифру можно выбрать пятью способами (взяв любую цифру, у которой четность отлична от четности первой цифры), и так далее: следующие цифры можно выбирать пятью способами (причем количество способов не зависит от предыдущих цифр). Поэтому по правилу произведения получаем результат: $9 \cdot 5^4$.

7.4. Назовём *ладейной парой* пару клеток шахматной доски, которые находятся на одной вертикали или горизонтали и между которыми ровно две клетки. Можно ли разбить всю доску на ладейные пары?



Ответ: нельзя. **Решение**. Раскрасим доску как показано на рисунке. Тогда любая ладейная пара содержит клетки одного цвета. При этом клеток белого цвета нечётное количество. Таким образом, всю доску нельзя разбить на ладейные пары. **Замечание.** Можно и без раскраски показать невозможность разбиения. Действительно, рассмотрим девять клеток шахматной доски: a1, a4, a7, d1, d4, d7, g1, g4, g7. Очевидно, у каждой из данных клеток ладейную пару с ней может составлять только одна из этих же девяти клеток. Поскольку 9 – число нечетное, разбить на пары не удастся.