11 класс

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_x y + \log_y x > 2$.

Ответ. См. рис.**Решение.**Область определения неравенства –это $x>0$, $y>0$, $x\neq1$, $y\neq1$. Используя свойство логарифмов$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$, получим эквивалентное неравенство $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} > 2$. Обозначим $t = \log_x y$.Решая неравенство$t + \frac{1}{t} > 2$, получим $\frac{(t-1)^2}{t} > 0$. Значит, имеем два условия: $t > 0, t \neq 1$.Первое из них эквивалентно тому, что(положительные) x и y одновременно либо меньше 1, либо больше 1. Второе условие эквивалентно $x\neq y$.

11.2. Имеется n гирек весом 1, 2…,n (гр) и двухчашечные весы. Можно ли все гирьки разложить на весах так, чтобы на одной чаше было вдвое больше гирек, чем на другой, и весы уравновесились:**а**) при $n = 90$; **б**) при $n = 99$?

Ответ. **а**) нельзя; **б**) можно. **Решение. а**) Сумма весов всех гирек $\frac{90\cdot91}{2} = 4095$ является нечётным числом, следовательно, 90 гирек нельзя разделить на две кучки с равной суммой. **б**) Попробуем найти 33 гирьки с последовательными весами, общий вес которых равен половине суммы весов всех гирь. Решая уравнение $k + (k+1) + \cdots + (k+32) = \frac{99\cdot100}{4}$, т.е. $\frac{(2k+32)\cdot33}{2} = 99\cdot25$,откуда k=59. Значит, на первую чашу можно положить гирьки с весами 59, 60,…,91, а все оставшиеся – на вторую чашу.

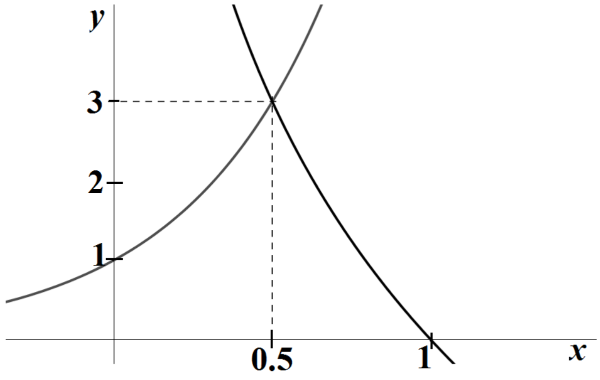
11.3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

Решение. См. задачу. 10.3.

11.4. На координатной плоскости начерчена парабола $y = x^2$.На положительной полуоси Oy взяли точку A и через неё провели две прямые с положительными угловыми коэффициентами. Пусть M_1, N_1 и M_2, N_2– точки пересечения с параболой первой и второй прямой соответственно. Найдите ординату точки A, если известно, что $\angle M_1ON_1 = \angle M_2ON_2$, где O – начало координат.

Ответ. 1. **Решение.** Обозначим через a ординату точки A. Прямая, проходящая через точку A, имеет уравнение $y=k\cdot x+a$, а абсциссы x_1,x_2 точекM и N пересечения прямой с параболой являются корнями уравнения $x^2=k\cdot x+a$. Из теоремы Виета имеем $x_1\cdot x_2= -a$и $x_1+x_2=k$. Вычислим$\cos(\angle MON) = \frac{(\vec{MO},\vec{NO})}{|\vec{MO}||\vec{NO}|} = \frac{x1\cdot x2\cdot(1+x1\cdot x2)}{|x1\cdot x2|\sqrt{(1+x1^2)(1+x2^2)}} = \frac{-a(1-a)}{a\sqrt{1+a^2-2a+k^2}} = \frac{a-1}{\sqrt{1+a^2-2a+k^2}}$. При a=1 имеем$\cos(\angle MON)$=0 и, значит, $\angle MON$не зависит от k. Если же $a\neq1$и для двух угловых коэффициентов$k_1,k_2>0$ соответствующие углы равны, то из равенства $\frac{a-1}{\sqrt{1+a^2-2a+k1^2}} = \frac{a-1}{\sqrt{1+a^2-2a+k2^2}}$ следует $k_1^2 = k_2^2$, т.е.$k_1 = k_2$(в силу положительности k_1,k_2). Таким образом, получаем ответ a=1. (Можно получить равенство $k_1 = k_2$ и без использования скалярного произведения: вместо этого можно при вычислении тангенса угла MONприменить формулу тангенса суммы двух углов MOA и NOA.)

11.5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x = \sqrt{y} \\ 2^{-y} = x^3 \end{cases}$.



Ответ.x=1/2, y=3. **Решение.** Непосредственно проверяется, что числа x=1/2, y=3 являются решением системы. Докажем, что решение единственно. Для этого покажем, что функция$y(x)$, заданная первым уравнением, строгомонотонно убывает, а функция, заданная вторым уравнением, строго монотонно убывает. Действительно, производная первой функции равна $y' = (3^{2x})' = \ln 3 \cdot 3^{2x} \cdot 2 > 0$. Вторая функция определена при x>0 и её производная имеет вид $y' = \left(-\frac{3\ln x}{\ln 2}\right)' = -\frac{3}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x} < 0$.Таким образом, система имеет единственное решение $x=1/2$, $y=3$.(При обосновании монотонности указанных функций можно и не использовать производную, а сослаться на соответствующие свойства показательной и логарифмической функций для конкретных оснований).