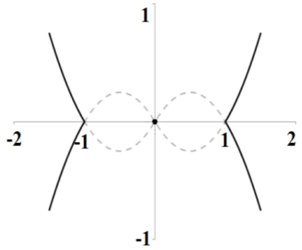
10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x| + |y| = x^2$.

Решение. Заметим, что если точка $(x_0; y_0)$ принадлежат нашему множеству, то и точки $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ также ему принадлежат. Значит, достаточно изобразить наше множество в первом квадранте, а затем симметрично отразить относительно осей и начала координат. При $x \geq 0$, $y \geq 0$ уравнение принимает вид $y = x^2 - x$ – это парабола $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, у которой в первой четверти надо оставить начало координат и часть ветви, проходящей через точку (1;0). См. рис.



10.2. Из прямоугольной таблицы $m \times n$ клеток требуется вырезать по линиям сетки несколько квадратов разного размера. Какое наибольшее количество квадратов можно вырезать, если: **а**) $m = 8$, $n = 11$; **б**) $m = 8$, $n = 12$?

. **Ответ: а**) 5; **б**) 5. **Решение.** См. задачу 9.2. **Ответ: а**) 5; **б**) 5.

10.3. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $ax^2 + \sin^2 x = a^2 - a$ имеет единственное решение.

Ответ: $a = 1$. **Решение**. Заметим, что только $x = 0$ может быть единственным корнем уравнения, т.к. в силу четности входящих функций, для любого решения $x_0 \neq 0$ решением будет и $(-x_0)$. Значит, по необходимости получаем $a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ или $a = 1$. Проверим эти значения. При $a = 0$ имеем уравнение $\sin^2 x = 0$, у которого бесконечное множество решений $x = k\pi\,(k \in Z)$. Если же $a = 1$, то уравнение $x^2 + \sin^2 x = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

10.4. . Верно ли, что для любого нечётного $n > 3$ можно отметить (и обозначить) на плоскости точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы n треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4, \ldots, A_nA_1A_2$ были остроугольными?

Ответ: верно. **Решение**. См. задачу 9.4.