10 класс

10.1. Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится одно и то же число a. Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

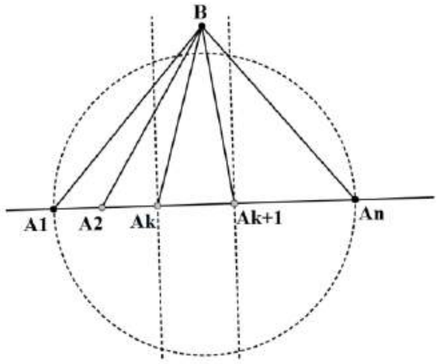
Решение. См. задачу. 9.1.

10.2. Решите уравнение $4x = 2 + \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$.

Ответ. $x = \frac{9}{16}$.**Решение**. Домножив дробь в правой части на выражение$\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ (сопряженное к знаменателю), получим после сокращения на $x \neq 0$уравнение $4x$=1+$\sqrt{1+x}$. Далее, сократив на выражение в правой части и преобразовав точно так же, как ранее, будем иметь уравнение $4\left(\sqrt{1+x}-1\right) = 1$. Отсюда $1 + x = \frac{25}{16}$, т. е $x = \frac{9}{16}$. **Комментарий**. Заметим, что в данном решении можно и не делать проверку корня x = 9/16, подставляя его в исходное уравнение (хотя это и несложно). Дело в том, что при наших преобразованиях было сделано домножение на сопряженное выражение, которое обращается в нуль только при x = 0 (что, как отмечено, корнем не является). В конце решения было возведение в квадрат равенства с квадратным корнем в левой части и положительным числом 5/4 в правой. В силу положительности правой части такое возведение в квадрат также даёт равносильное уравнение. При других способах решения, встречавшихся в работах участников, возводились в квадрат уравнения, где правая и левая части содержали функции от x (обычно, линейные). При таких способах решения уравнения получаются, вообще говоря неравносильные (они являются следствием исходного) и нет гарантии, что не получится лишних корней. Поэтому в этом случае, если участники в конце получали x = 9/16, но не делали проверки, то оценка снижалась.

10.3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

Решение. ПустьA_1, A_2,…,A_n– отмеченные точки в порядке следования на прямой. Пусть $k = [\frac{n}{2}]$, где $[m]$ – целая часть числа m. Отметим точку B такую, что её проекция на прямую принадлежит интервалу (A_k,A_{k+1}) и $\angle A_1BA_n$ – острый (последнее условие заведомо выполняется, если взять точку B на расстоянии от прямой, большем, чем длина A_1A_n.) Покажем, что точка B является искомой. Остроугольными будут те треугольники ΔBA_iA_j, для которых точки A_i и A_jлежат по разные стороны от проекции точкиB. Действительно, угол при вершине B у любого такого треугольника острый, т.к. он не превосходит угла $\angle A_1BA_n$, а углы при основании острые, поскольку вершина проектируется внутрь основания. Количество пар точек (A_i, A_j) для таких треугольников равно $k \cdot (n-k)$. Так как всего треугольников $\frac{n(n-1)}{2}$, то достаточно проверить неравенство $k(n-k) > \frac{n(n-1)}{4}$.При четном $n=2k$имеем очевидное неравенство $k^2 > \frac{2k(2k-1)}{4}$, а при нечетном n=2k+1 неравенство принимает вид $k(k+1) > \frac{2k(2k+1)}{4}$и также легко проверяется.



10.4. Петя говорит Васе: «Я построил неравнобедренный треугольник ABC и провел биссектрисы AM и CN. Оказалось, что OM = ON, где O – точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол B?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравнобедренном треугольнике отрезки OM и ON оказались равными!». Кто из мальчиков прав?

Ответ. Прав Петя. **Решение.** См. задачу 9.4.

10.5. Найдите все пары натуральных чисел m, n:, для которых $n!+4! = m^2$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

Ответ:Две парыn=1, m=5 иn=5, m=12. **Решение.** См. задачу 9.5.