9 класс

9.1. Найдите значение выражения $\dfrac{(a^2+b^2)^2-c^2-4a^2b^2}{a^2+c-b^2}$ при a = 2017, b = 2016, c = 2015. Результат обоснуйте.

Ответ: 2018. **Решение**. См. задачу 8.1.

9.2. Петя говорит Коле: «Если ты задумаешь квадратный трехчлен, имеющий корни, и назовешь мне только старший коэффициент и расстояние между корнями, то я угадаю ординату вершины на его графике». Коля считает, что Петя ошибается: ведь для задания квадратного трехчлена нужно знать три числа. Кто из мальчиков прав?

Ответ: Петя. **Решение**. Пусть a – старший коэффициент, $d=|x_2-x_1|$ – расстояние между корнями. Результат следует из соотношений $ax^2+bx+c=$ $a(x-x_1)(x-x_2)=$ $a\left(\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+x_1x_2-\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)$ = $a\left(\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{d}{2}\right)^2\right)$. Таким образом, ордината вершины равна $-a\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ и зависит только от a и d.

9.3. На доске записано несколько (более двух) последовательных целых чисел. **а)** Докажите, что можно стереть одно число так, чтобы среднее арифметическое оставшихся чисел было целым. **б)** Какое число k (удовлетворяющее свойству п. а)) можно стереть, если записано сто чисел: 1, 2, …, 100? Укажите все возможные значения k.

Ответ: **б)** k = 1 или k = 100. **Решение**. См. задачу 8.4.

9.4. Дан неравносторонний треугольник, у которого длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что в этом треугольнике есть два угла, меньшие 60°.

Решение. Пусть длины сторон равны $a-d, a, a+d$, где d > 0. Очевидно, против меньшей стороны $a-d$ лежит меньший угол в треугольнике, т.е. этот угол меньше 180º/3 = 60º. Покажем, что и против стороны a лежит угол α меньше 60º. Из теоремы косинусов имеем

(*) $$a^2=(a+d)^2+(a-d)^2-2(a+d)(a-d)\cos\alpha$$

Если бы угол α был не меньше 60°, то $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$ и $-2(a+d)(a-d)\cos\alpha \ge -(a+d)(a-d)$. Тогда получили бы правую часть в (*) не меньше $2(a^2+d^2)-a^2+d^2 = a^2+3d^2$. Противоречие доказывает результат.

9.5. Имеется *n* гирек, каждая весит целое число граммов, а суммарный их вес равен 100 гр. Верно ли, что все гирьки всегда можно разложить на две чаши весов так, чтобы они уравновесились, если **а)** *n* =50; **б)** *n* =51?

Ответ: а) неверно; **б)** верно. **Решение**. **а)** Если взять одну гирьку весом 51 гр и 49 гирек весом 1 гр, то их нельзя разложить на две части, равные по весу. **б)** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ – веса гирек. Рассмотрим правильный 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$ и отметим в нем 51 вершину: $A_{a_1}, A_{a_1+a_2}, A_{a_1+a_2+a_3} \ldots, A_{a_1+a_2+\ldots a_{51}} = A_{100}$. Поскольку отмеченных вершин среди вершин 100-угольника больше половины, то найдутся хотя бы две отмеченные диаметрально противоположные вершины, скажем, A_i и A_{i+50} (где нумерация циклическая: $A_{101} = A_1, A_{102} = A_2$ и т.д.). Таким образом, $A_i = A_{a_1+a_2+\ldots+a_j}$, $A_{i+50} = A_{a_1+\ldots+a_j+a_{j+1}+\ldots+a_k}$ при некоторых *j*, *k*, поэтому $a_{j+1}+a_{j+2}+\ldots+a_k = 50$ и оставшаяся сумма $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots$тоже равна 50.