9 класс

9.1. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BM*. Докажите, что $AM < AB$ и $MC < BC$.

Решение. См. задачу 8.1.

9.2. Каким числом – рациональным или иррациональным – является $\sqrt[3]{2016^2+2016\cdot 2017+2017^2+2016^3}$?

Ответ: целым рациональным числом 2017. **Решение**. Пусть a=2017, $b=2016$. Тогда $b^2+ab+a^2+b^3=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}+b^3=a^3-b^3+b^3=a^3$ (т.к. $a-b=1$). Таким образом, получаем в результате $\sqrt[3]{a^3}=a=2017$.

9.3. Справедливы ли следующие утверждения: **а)** Если для любой точки *M* внутри треугольника *ABC* из отрезков *MA*, *MB* и *MC* можно составить треугольник, то $\Delta.ABC$ равносторонний? **б)** Для любой точки *M* внутри равностороннего треугольника *ABC* из отрезков *MA*, *MB* и *MC* можно составить треугольник?

Ответ: а) справедливо; **б)** справедливо. **Решение**. **а)** См. задачу 8.3. **б)** Пусть *ABC* – равносторонний треугольник. Рассмотрим ΔABM и повернем его на 60° вокруг точки *B* так, чтобы сторона *AB* совпала с *AC*. Точка *M* займет при этом положение M'. Тогда $\Delta MBM'$ равносторонний (т.к. $MB = BM'$ и $\angle MBM' = 60°$). Стороны треугольника $MM'C$ равны отрезкам *MA*, *MB* и *MC*. Действительно, $MM' = MB$, а $M'C = MA$ (при повороте отрезок *MA* занимает положение $M'C$), что и требовалось доказать. Другой способ решения основан на двух неравенствах: $MA+MC>AC=a$ и $MB<max(AB, BC)=a$, где a – сторона треугольника.

9.4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого **а)** $n!$ делится на 2016; **б)** $n!$ делится на 2016^{10}. (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.)

Ответ: а) $n = 8$; **б)** $n = 63$. **Решение**. **а)** Поскольку $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$, n должно быть не меньше 7. Но 7! не делится на 32. При $n = 8$ делимость 8! на 32 (а также на 9 и 7) имеет место. **б)** Имеем $(2016)^{10}=2^{50}\cdot 3^{20}\cdot 7^{10}$. Делимость $n!$ на степени семерки обеспечивают числа 7, 14, 21, ... не превосходящие n. Заметим, что число 49 вносит «вклад» 2 в степень семерки. Значит, для делимости на 7^{10} достаточно взять $n=7\cdot 9=63$. Проверим, что 63! делится на 3^{20} и 2^{50}. Делимость на 3^{20} очевидна (т.к. $63:3=21>20$). Делимость на степени двойки обеспечивают четные числа – 31 четное число меньше 63. Но числа, кратные 4 (таких чисел 15), дают вклад в степень двойки по две единицы; числа, кратные 8 (их 7) – по три единицы, поэтому 63! делится на $2^{31+15+7} = 2^{53}$ (на самом деле 63! делится на двойку в степени $\left[\frac{63}{2}\right]+\left[\frac{63}{4}\right]+\left[\frac{63}{8}\right]+\left[\frac{63}{16}\right]+\left[\frac{63}{32}\right]=57$, где [ ] – целая часть числа).