

8.1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Докажите, что $AM < AB$ и $MC < BC$.

Решение. По свойству внешнего угла $\angle AMB = \angle MBC + \angle BCA > \angle MBC = \angle MBA$. Поэтому в треугольнике ABM против большего угла лежит бо́льшая сторона: $AB > AM$. Аналогично, $MC < BC$.

8.2. Было у отца три сына, и оставил он им в наследство 9 соток земли – прямоугольник размером 25 м \times 36 м. Братья решили разделить землю на три прямоугольных участка – по три сотки на брата. Сколько есть вариантов раздела (с точки зрения длины и ширины участков) и в каком из вариантов общая длина заборов между участками будет наименьшей?

Ответ: 4 варианта; наименьшая длина 49м в варианте раздела на участок 25 \times 12 и два участка 12.5 \times 24. **Решение.** См. задачу 7.2.

8.3. Дан треугольник ABC . Известно, что для любой точки M внутри треугольника ABC из трех отрезков MA , MB и MC можно составить треугольник. Верно ли, что треугольник ABC должен быть равносторонним?

Ответ: верно. **Решение.** Предположим, от противного, что $\triangle ABC$ не равносторонний, и пусть, для определенности, AC – наибольшая сторона. Хотя бы одна из прилежащих сторон (AB или BC) меньше, чем AC . Пусть, для определенности, $AB < AC$. Если M совпадает с точкой A , то $MC = AC > MA + MB = AB$. Тогда понятно, что для точек M , очень близких к A , внутри $\triangle ABC$ также будет нарушено неравенство треугольника. Строгое доказательство этого факта такое. Пусть d – положительное число, меньшее $\frac{1}{3}(AC - AB)$. Возьмем точку D внутри $\triangle ABC$, чтобы она лежала внутри круга радиуса d с центром в точке A . Тогда $MA < d$, $MB < AB + d$ и $AC < d + MC$. Поэтому $MC - MA - MB > AC - d - d - AB - d = AC - AB - 3d > AC - AB - (AC - AB) = 0$. Полученное противоречие с неравенством треугольника доказывает наше утверждение.

8.4. Сколькими нулями оканчивается произведение $s(1) \cdot s(2) \cdot \dots \cdot s(100)$, где $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n ?

Ответ: 19-ю нулями. **Решение.** См. задачу 7.4.