Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки». Математика. Финальный тур 2016/17

7 класс

7.1. Ученикам 7а класса объявили, что для них будет организован драмкружок, если в него запишется не менее 14 человек. Оказалось, что среди записавшихся более 85% девочек и в списке есть друзья Петя и Дима. Докажите, что кружок будет организован.

Решение. Предположим противное. Тогда в списке не более 13 человек. Поскольку мальчиков в списке как минимум двое, то в процентном отношении мальчиков не менее $\frac{2}{13}\cdot 100\% > 15\%$ (т.к. $\frac{2}{13} > \frac{15}{100}$). Значит, девочек в списке менее 85%. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

7.2. В вершинах куба расставили целые числа, а затем для каждой грани подсчитали произведение четырех чисел в вершинах этой грани. Могло ли оказаться так, что все шесть подсчитанных произведений отрицательны?

Ответ: можно. **Решение**. Расставим в двух противоположных вершинах куба два отрицательных числа, а в остальных шести вершинах – положительные. Если $ABCD$ – нижняя грань куба, а над ней грань $A_1B_1C_1D_1$, тогда два отрицательные числа поставим в вершины A и C_1. Тогда в трех гранях, в которых есть вершина A, произведение будет отрицательным, отрицательным оно будет и в остальных трех гранях с вершиной C_1.

7.3. На доске записано 100 натуральных чисел (не обязательно различных). **а)** Докажите, что если сумма любых трех чисел на доске меньше суммы любых четырех из оставшихся, то сумма любых двух чисел на доске меньше суммы любых трех из оставшихся. **б)** Верно ли, что если сумма любых двух чисел на доске меньше суммы любых трех из оставшихся, то сумма любых трех чисел на доске меньше суммы любых четырех из оставшихся?

Ответ: б) неверно. **Решение**. **а)** Рассуждаем от противного: пусть сумма каких-то двух чисел на доске не меньше суммы каких-то трех из оставшихся чисел; тогда возьмем из остальных 95 чисел произвольные два числа x, y, и пусть для определенности $x \le y$. Добавив x к исходной тройке чисел, а $y -$ к исходной паре, получим противоречие с условием: сумма трех чисел оказалась не меньше суммы четырех. **б)** Обратное утверждение неверно. Рассмотрим пример: 15, 15, 15, 11, …, 11 (три числа равны 15, остальные 97 чисел равны 11). Условие выполнено, т.к. $15+15<11+11+11$, но $15+15+15>11+11+11+11$.

7.4. Есть 20 палочек длины 1, 2, …, 20. Можно ли из них сложить **а)** квадрат; **б)** равносторонний треугольник? (Нужно использовать, не ломая, все палочки.)

Ответ: а) нельзя; **б)** можно. **Решение**. **а)** Сумма длин всех 20 палочек равна 210. Это число не делится на 4, и поэтому сложить квадрат не удастся. **б)** Распределить 210 на три равные чисти по 70 в каждой можно по-разному, например, так: $(20+19+18+13)+(17+16+15+14+8)+(1+2+3+4+5+6+7+9+10+11+12)$.

7.5. Андрей и Сева собрались в гости к Боре. Андрей находится в пункте A, а Боря – в пункте B на расстоянии 30 км от пункта A по прямому шоссе. Сева находится в пункте C ровно посередине между A и B. Друзья решили отправиться одновременно: Андрей на велосипеде, а Сева пешком, но Андрей оставит велосипед в условленном месте, чтобы им воспользовался Сева (Андрей закончит путь пешком). На велосипеде мальчики двигаются со скоростью 20 км/час, а пешком – со скоростью 5 км/час. Где надо оставить велосипед, чтобы друзья смогли вместе как можно раньше попасть к Боре?

Ответ: за 5 км до пункта B. **Решение**. Обозначим: a = 15 (км), u = 5 (км/час), v = 20 (км/час). Пусть x (км) – расстояние от пункта B до места, где оставлен велосипед. Тогда время Андрея в пути равно $t_A = \frac{2a-x}{v}+\frac{x}{u}$, а время Севы $t_C = \frac{a-x}{u}+\frac{x}{v}$. Требуется найти такое значение *x*, для которого наибольшее из двух времен t_A и t_C было бы как можно меньше (если, например, $t_A < t_C$, то это время равно t_C: Андрей придет в пункт *B* раньше Севы и будет ждать его там, чтобы вместе прийти к Боре). Заметим, что $t_A + t_C = \frac{2a}{v} + \frac{a}{u}$, т.е. не зависит от *x*. Обозначим эту сумму за *T*. Таким образом, оптимальное значение *x* такое, для которого $t_A = t_C = \frac{T}{2}$ (иначе одно из чисел t_A, t_C будет больше *T*/2). Решая уравнение $\frac{2a-x}{v} + \frac{x}{u} = \frac{a-x}{u} + \frac{x}{v}$, находим $x = \frac{(v-2u)a}{2(v-u)} = \frac{10 \cdot 15}{2 \cdot 15} = 5$ (км). **Комментарий.** Заметим, что из равенства $t_A = t_C$ автоматически следует, что в момент, когда Андрей оставит велосипед, Сева еще не придет в условленное место, так что данный факт проверять не обязательно (при наших данных этот момент наступит при t = 1 час 15 мин, а Сева придет в это место через 2 часа). С другой стороны, доказательство того факта, что в оптимальном варианте $t_A = t_C$, обязательно (в приведенном выше рассуждении для этого сначала мы доказали, что $t_A + t_C = \mathrm{const}$. Можно доказать этот факт по-другому, рассуждая от противного: если в оптимальном варианте $t_A \neq t_C$, то надо рассмотреть два случая: либо $t_A < t_C$, либо $t_A > t_C$ и в каждом из этих случаев легко показать, как улучшить время, если оставить велосипед немного ближе или, соответственно, немного дальше данного места). Без доказательства этого факта решение оценивается меньше половины максимального балла.