Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки». Математика.
Отборочный тур 2016/17.
1 вариант

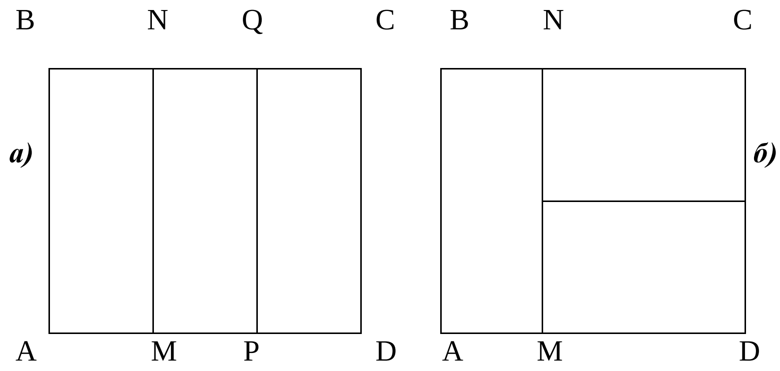
7 класс

7.1. Припишите к числу 2016 справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 72 (приведите все решения).

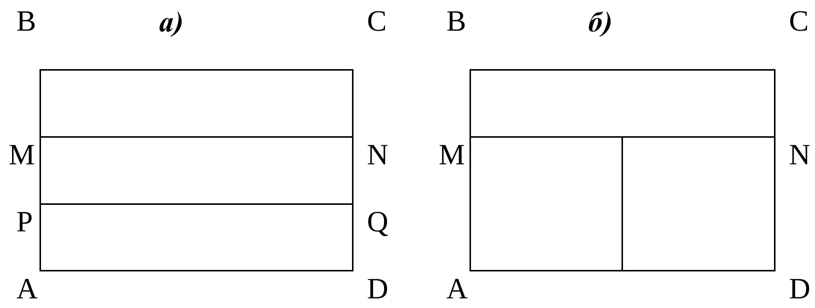
Ответ: 920160 и 120168. **Решение**. Искомое число должно делиться на 72 = 8·9. Для делимости на 8 надо, чтобы трехзначное число из последних цифр делилось на 8. Поскольку 16 уже делится на 8, то справа надо приписать 0 или 8. Для делимости на 9 надо чтобы сумма цифр делилась на 9. В первом случае тогда надо приписать слева девятку (если приписать 0, то получится пятизначное число), а во втором – единицу.

7.2. Было у отца три сына, и оставил он им в наследство 9 соток земли – прямоугольник размером 25 м × 36 м. Братья решили разделить землю на три прямоугольных участка – по три сотки на брата. Сколько есть вариантов раздела (с точки зрения длины и ширины участков) и в каком из вариантов общая длина заборов между участками будет наименьшей?

Ответ: 4 варианта; наименьшая длина 49 м в варианте раздела на участок 25×12 и два участка 12.5×24. **Решение**. Пусть $ABCD$ – исходный прямоугольник; AB = 25, BC = 36. Поскольку у него 4 вершины, а участков 3, две вершины должны принадлежать одному участку. Рассмотрим сначала случай, когда вершины меньшей стороны (скажем. AB) принадлежат такому участку $ABNM$ (см. рис.). В этом случае оставшуюся часть – прямоугольник $MNCD$ нужно разделить на два равных прямоугольника, это можно сделать двумя способами (см. рис.).



Аналогично, во втором случае (когда B, C принадлежат одному участку) могут быть два варианта деления (см. рис.). Из условия равенства площадей получаем размеры участков: в первом случае – а) три участка 25×12 или б) один участок 25×12 и два участка 12.5×24; во втором случае – а) три участка $\frac{25}{3}\times 36$ или б) один участок $\frac{25}{3}\times 36$ и два участка $\frac{50}{3}\times 18$.



Общая длина заборов в этих четырех вариантах будет соответственно 50 или 49 (в первом случае) и 72 или $\frac{158}{3}$.(во втором случае) Значит, 49 - наименьшая длина.

7.3. Числа a, b, c удовлетворяют соотношению $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$. Найдите $a+b+c$, если известно, что $b \neq c$.

Ответ: 0. **Решение**. Из равенства $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}$ получим $a(b-c)=(c-b)(c+b)$. Разделив это равенство на $b-c \neq 0$, получим $b+c=-a$. Значит, $a+b+c=0$.

7.4. Сколькими нулями оканчивается произведение $s(1)\cdot s(2)\cdot\ldots\cdot s(100)$, где $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n?

Ответ: .19-ю нулями. **Решение**. Рассмотрим числа из первой сотни, для которых сумма цифр делится на 5. Такие числа имеют сумму цифр либо 5, либо 10, либо 15. Чисел с суммой 5 всего 6: это 5, 14, 23, 32, 41, 50. Чисел с суммой цифр 10 всего 9: это 19, 28, …, 91. Чисел с суммой цифр 15 всего 4: это 69, 78, 87, 96. Таким образом, в произведении $P = s(1) \cdot s(2) \cdot\ldots\cdot s(100)$ множитель 5 содержится в 19-й степени. А множитель 2 в P содержится в (гораздо) большей степени (достаточно рассмотреть, например, числа с суммой цифр 8; имеется 9 таких чисел, и каждое вносит в P множитель 2^3, поэтому двойка содержится в P в степени $\geq 3\cdot 9 = 27$). Итак, P оканчивается на 19 нулей