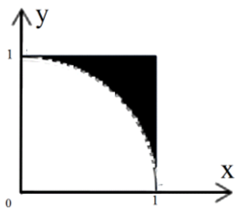
11 класс

11.1. Дана последовательность $a_n = (-1)^{1+2+...+n}$. Найдите $a_1 + a_2 + ... + a_{2017}$.

Ответ: –1. **Решение**. Имеем $a_n = (-1)^{Sn}$, где $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Легко заметить и доказать, что четность числа S_n повторяется с периодом 4: действительно, $S_{n+4} - S_n = \dfrac{(n+4)(n+5) - n(n+1)}{2} = \dfrac{8n+20}{2} = 4n+10$, т.е. четное число. Значит, $a_1 + a_2 + ... + a_{2017} = (-1-1+1+1) + (-1-1+1+1) + ... + (-1-1+1+1) + (-1) =$ 0 +0+ … + 0+(–1)= –1.

11.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\arcsin x + \arcsin y > \frac{\pi}{2}.$$



Решение. Заметим, что данное множество находится в первой четверти, т.к. если $x < 0$ (или $y < 0$), то из неравенства следует, что $\arcsin y > \frac{\pi}{2} - \arcsin x > \frac{\pi}{2}$. Поэтому рассматриваем $x, y \in [0,1]$. Имеем $\arcsin y > \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Leftrightarrow \sin(\arcsin y) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$ (неравенства равносильны, т.к. при $x \geq 0$ $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$). Таким образом $y > \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 > 1 - x^2$, (неравенства равносильны при $y \geq 0$). Итак, имеем множество в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ вне единичного круга (см. рис.).

11.3. Дана трапеция *ABCD* (*BC* || *AD*), в которую вписана окружность с центром *O*. Прямые *BO* и *CO* пересекают нижнее основание *AD* в точках *M* и *N* соответственно. Докажите соотношение для площадей $S_{AON} + S_{DOM} + 2S_{NOM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Решение. Заметим, что треугольники *BOC* и *MON* равны (*BO* = *OM, CO* = *ON*, поскольку *O* лежит на средней линии трапеции, и $\angle BOC = \angle MON$ – вертикальные углы). Поэтому $S_{AON} + 2S_{NOM} + S_{MOD} = S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (так же, как в задаче 10.3). Другой способ следует из решения задачи 10.3, т.к. $S_{AON} + 2S_{MON} + S_{MOD} = S_{AOM} + S_{NOD} = S_{AOB} + S_{COD}$ $= \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

11.4. Сколько существует **а)** прямоугольников; **б**) прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых площадь численно равна периметру? (Равные фигуры считаются за одну).
Ответ: а) два; **б**) два. **Решение**. См. задачу 10.5.

11.5. О некотором квадратном трехчлене известна следующая информация: его старший коэффициент равен единице, у него целые корни, а его график (парабола) пересекается с прямой $y = 2017$ в двух точках с целыми координатами. Можно ли по этой информации однозначно определить ординату вершины параболы?
Ответ: можно. **Решение**. Пусть n_1 ,n_2 $(n_1 < n_2)$ – корни данного квадратного трехчлена $f(x)$. Тогда $f(x) = (x - n_1)(x - n_2)$. Из условия о целых корнях уравнения $(x - n_1)(x - n_2) = 2017$ получаем (в силу простоты числа 2017), что для корня этого уравнения x_0 будем иметь либо $x_0 - n_1 = 2017,\ x_0 - n_2 = 1$, либо $x_0 - n_1 = -1,\ x_0 - n_2 = -2017$. В обоих случаях $n_2 - n_1 = 2016$. Зная расстояние между корнями, однозначно определяем ординату вершины (см. задачу 9.2). Она равна $-\left(\frac{2016}{2}\right)^2 = -1008^2$.