11 класс

11.1. Решите уравнение $|x+1| = x^2 + 3x + 1$.

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = -2 - \sqrt{2}$. **Решение**. См. задачу 10.1.

11.2. Касательная к графику $y = x^2$ пересекает оси *Ox* и *Oy* в точках *A* и *B*. Найдите длины катетов *OA* и *OB*, если площадь треугольника *AOB* равна 16.

Ответ: *OA* = 2, *OB* = 16. **Решение**. Пусть (x_0, x_0^2) – точка касания, для определенности $x_0 > 0$ (при $x_0 < 0$ касательная отсекает на осях те же по длине отрезки, что и при $(-x_0)$). Уравнение касательной $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, (т.к. $(x^2)' = 2x$). Отсюда получаем координаты точек пересечения с осями: $A\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$, $B(0, -x_0^2)$. Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0}{2} \cdot x_0^2 = \frac{x_0^3}{4} = 16 \Rightarrow x_0 = 4$, откуда следует результат: *OA* = 2, *OB* = 16.

11.3. Дан параллелограмм *ABCD*. Можно ли утверждать, что *ABCD* – прямоугольник, если известно, что **а)** радиусы вписанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD* совпадают? **б)** радиусы описанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD* совпадают?

Ответ: а) можно; **б)** можно. **Решение**. См. задачу 10.3.

11.4. Докажите неравенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta \le 1 + |\cos\alpha \cdot \cos\beta|$.

Решение. Поскольку $\cos^2\alpha \le |\cos\alpha|$, $\cos^2\beta \le |\cos\beta|$ то достаточно доказать, что $|\cos\alpha| + |\cos\beta| \le 1 + |\cos\alpha| \cdot |\cos\beta| \Leftrightarrow (1 - |\cos\alpha|)(1 - |\cos\beta|) \ge 0$. Последнее неравенство очевидно (т.к. $|\cos x| \le 1$ для всех *x*).