10 класс

10.1. Петя говорит Коле: «Если ты задумаешь квадратный трехчлен, имеющий корни, и назовешь мне только старший коэффициент и расстояние между корнями, то я угадаю ординату вершины на его графике». Коля считает, что Петя ошибается: ведь для задания квадратного трехчлена нужно знать три числа. Кто из мальчиков прав?

Ответ: Петя. **Решение**. См. задачу 9.2.

10.2. Даны три числа: *x, y, z*. Известно, что каждое из чисел $2x-y$, $3y-2z$ и $4z-3x$ отрицательно. Докажите, что каждое из чисел *x, y, z* тоже отрицательно?

Решение. Обозначим $A=2x-y$, $B=3y-2z$, $C=4z-3x$. Тогда $3A+B+2C=6z$, и значит, $z<0$. Далее, из равенств $3y=B+2z$ и $2x=A+y$ последовательно получим, что $y<0$ и $x<0$.

10.3. Дана трапеция *ABCD* (*BC* || *AD*), в которую вписана окружность с центром *O*. Прямая *BO* пересекает нижнее основание *AD* в точке *M*. Докажите соотношение для площадей $S_{AOM}+S_{COD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Решение. Рассмотрим два треугольника *ABO* и *AMO*. Треугольник *ABO* – прямоугольный, т.к. $\angle AOB=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=90^\circ$. (Здесь использовано два факта: центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, и сумма углов трапеции, прилегающих к боковой стороне, равна 180º.) Поэтому треугольники *ABO* и *AMO* равны (по стороне *AO* и прилегающим углам). Значит, $S_{ABO}=S_{AMO}$, и осталось доказать, что $S_{ABO}+S_{COD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot r=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+AD)\cdot r$, где r – радиус вписанной окружности. Но $AB+CD=BC+AD$ по свойству вписанной в четырехугольник окружности, откуда следует результат. (см. также способ решения в задаче 11.3)

10.4. Имеется *n* гирек, каждая весит целое число граммов, а суммарный их вес равен 2*k* (гр). Верно ли, что все гирьки всегда можно разложить на две чаши весов так, чтобы они уравновесились, если **а)** $n=k$; **б)** $n=k+1$?

Ответ: а) неверно; **б)** верно. **Решение**. См. задачу 9.5 (с заменой n и k на 50.) **Комментарий**. При нечетном n кроме контрпримера $(n+1, 1, 1, \ldots, 1)$ можно привести такой (2,2,...,2) (n двоек) и можно показать, что других примеров не существует

10.5. Сколько существует **а)** прямоугольников; **б**) прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых площадь численно равна периметру? (Равные фигуры считаются за одну).

Ответ: а) два; **б**) два. **Решение**. **а**) Пусть стороны прямоугольника целые числа a и b $(a\le b)$. Тогда $ab=2(a+b)$, что эквивалентно равенству $(a-2)(b-2)=4$. Число 4 можно разложить четырьмя способами в произведение двух целых чисел: (1;4),(2,2),(-4;-1),(-2,-2), из которых первые два дают прямоугольники (3,6) и (4,4). **б**) Пусть катеты прямоугольного треугольника a и b $(a\le b)$. Имеем уравнение $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=\frac{ab}{2}$. Обозначим $u=a+b$, $v=ab$ Тогда уравнение можно записать в виде $2u+2\sqrt{u^2-2v}=v$. После выделения квадратного корня в левой части, возведения обеих частей в квадрат и деления уравнения на v, получим: $v-4u+8=0$, т.е. ab-$4a$-$4b$+8 , или $(a-4)(b-4)=8$. Число 8 можно разложить четырьмя способами в произведение двух целых чисел: (1;8),(2,4),(-8;-1),(-4,-2), из которых первые два дают прямоугольные треугольники (5,12,13) и (6,8,10).