9 класс

9.1. Докажите, что для любого натурального n число $n^3 + 6n^2 + 12n + 16$ составное.

Решение. Результат следует из формул куба суммы и суммы кубов: $n^3 + 6n^2 + 12n + 16$ = $(n+2)^3 + 8 = (n+4)\big((n+2)^2 - 2(n-2) + 4\big)$.

9.2. **а**) Дано квадратное уравнение $x^2 - 9x - 10 = 0$. Пусть a – его наименьший корень. Найдите $a^4 - 909a$. **б**) Для квадратного уравнения $x^2 - 9x + 10 = 0$, у которого b – наименьший корень, найдите $b^4 - 549b$.

Ответ: а) 910; **б)** –710. **Решение**. **а)** Решим задачу в общем виде. Пусть $x^2 - cx + d = 0$ – квадратное уравнение, a – его корень. Тогда $a^4 = (ca-d)^2 = c^2a^2 - 2acd + d^2$ = $c^2(ca-d) - 2acd + d^2 = a(c^3 - 2cd) + d^2 - c^2d$. Значит, $a^4 - (c^3 - 2cd)a = d^2 - c^2d$. При $c = 9,\ d = -10$ получим $a^4 - 909a = 910$, а при $c = 9,\ d = 10$ имеем $b^4 - 549b = -710$. (В пункте а**)** легко и непосредственно получить результат).

9.3. На доске вначале было записано n чисел: 1, 2,…, n. Разрешается стереть любые два числа на доске, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может оказаться на доске после (n – 1) таких операций **а)** при n = 111; **б)** при n = 110?

Ответ: а) 0; **б)** 1. **Решение**. См. задачу 8.3.

9.4. Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*, у которого $AB = AD = 1$, $\angle A = 100°$, $\angle C = 130°$. Найдите длину диагонали *AC*.

Решение. См. аналогичное решение задачи 8.5.

9.5. В квадрате со стороной 1 отметили 53 точки, из которых четыре являются вершинами квадрата, а остальные (произвольные) 49 точек лежат внутри. Докажите, что найдется треугольник с отмеченными вершинами, имеющий площадь не более 0,01.

Решение. Пусть в квадрате отмечено n точек: 4 вершины квадрата и n – 4 точки внутри (n > 4). Докажем по индукции, что квадрат можно разбить на треугольники с отмеченными вершинами, причем число треугольников равно $2n$ – 6 (к такому выражению нетрудно прийти рассматривая значения n = 5, n = 6). База индукции очевидна: при n = 5 имеем 4 треугольника с общей вершиной внутри квадрата. Пусть для n = k квадрат разбит на $2k$ – 6 треугольников, и мы добавляем (k + 1)-ую отмеченную точку *M*. Если она оказалась внутри некоторого треугольника *ABC* данного разбиения, то мы получим три новых треугольника *MAB*, *MBC*, *MAC* вместо «старого» треугольника *ABC*. Таким образом, число треугольников при добавлении новой вершины стало равно $2k$ – 6 + 2 = 2(k + 1) – 6, и тем самым индукционный переход доказан. Если же точка *M* попала на сторону, скажем, *AB* треугольника *ABC*, то *AB* является общей стороной треугольника *ABC* и некоторого другого треугольника разбиения – скажем, треугольника *ABD*. В этом случае будем иметь 4 новых треугольника *AMD*, *BMD*, *AMC*, *BMC* вместо двух «старых» (треугольников *ABC* и *ABD*), и тем самым опять количество треугольников увеличилось на 2. Итак, при n = 53 получим разбиение квадрата на $2 \cdot 53 - 6 = 100$ треугольников с отмеченными вершинами и поэтому в единичном квадрате найдется треугольник площади не более 0,01.