8 класс

8.1. Имеется n кг крупы (n – целое число), чашечные весы и одна трехкилограммовая гиря. **а)** Докажите, что если n не делится на 3, то за несколько взвешиваний можно отмерить 1 кг крупы; **б)** Можно ли при $n = 19$ отмерить 1 кг крупы за три взвешивания?

Ответ: **б)** можно. **Решение**. **а)** Если на одну чашку весов положить гирю, а на другую насыпать крупу, уравновешивая весы, то оставшаяся крупа будет весить $n - 3$ кг. Пусть $n = 3k + r$, где r – остаток от деления n на 3, k – неполное частное (по условию $r \neq 0$). Значит, r равно 1 или 2. Проведем k взвешиваний указанного вида, тогда останется r кг крупы. Если $r = 1$, то задача решена. Если $r = 2$, то уберем гирю и проведем взвешивание, чтобы эти два килограмма крупы разделить пополам. **б)** См. задачу 7.1.

8.2. Двумя перпендикулярными разрезами прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Известно, что у трёх из них периметр выражается целым числом. Обязательно ли и у четвертого прямоугольника периметр будет целым?

Ответ: обязательно. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.3. На доске вначале было записано n чисел: 1, 2,…, n. Разрешается стереть любые два числа на доске, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может оказаться на доске после (n – 1) таких операций **а)** при $n = 111$; **б)** при $n = 110$?

Ответ: **а)** 0; **б)** 1. **Решение**. **а)** С помощью 55 следующих операций можно получить 56 единиц: {1, 3–2, 5–4,…, 111--110} = {1,1,…,1}. Из них с помощью 28 операций получим 28 нулей: {1–1, 1–1,…, 1–1} = {0,0,…,0}, а затем после 27 операций – один 0. **б)** Заметим, что при любой операции четность суммы чисел на доске не меняется (т.к. числа $a + b$ и $a - b$ одной четности). Вначале сумма 1 + 2 +…+ 110 была нечетной (в ней 55 нечетных слагаемых и 55 четных). Значит, в результате всех операций получить 0 не удастся. Получить единицу можно способом, аналогичным указанному в пункте а): а именно, {2–1, 4–3, …, 110--109} = {1,1,…,1} – здесь 55 единиц, и далее {1, 1–1, 1–1,…, 1–1} = {1,0,…,0}, т.е. получим единицу и 27 нулей, а затем – одну единицу.

8.4. На шахматной доске отметили центры некоторых клеток так, что никакой из треугольников с отмеченными вершинами не является прямоугольным. Какое наибольшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 14. **Решение**. См. задачу 7.5.

8.5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = AD = 1$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 140°$. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: 1. **Решение**. Докажем, что $AC = 1$ от противного. Если $AC > 1$, то в треугольнике ABC против большей стороны AC лежит больший угол: $\angle B > \angle BCA$. Аналогично для треугольника ADC имеем $\angle D > \angle DCA$. Сложив эти неравенства, будем иметь $\angle B + \angle D > \angle C = 140°$. Таким образом, сумма всех углов четырехугольника $(\angle A + \angle C) + (\angle B + \angle D) > (80° + 140°) + 140° = 360°$ – противоречие. Аналогично, если предположить, что $AC < 1$, то $\angle B + \angle D < \angle C$, и в результате получим сумму углов четырехугольника меньше 360º – снова пришли к противоречию. **Комментарий**. Другой способ решения использует свойства вписанных углов: если предположить, что точка C лежит внутри единичной окружности с центром в точке A, то угол C будет больше, чем $\frac{1}{2}(360° - \angle A) = 140°$, а если C лежит вне окружности, то угол C будет меньше 140º. Значит, C лежит на окружности.