11 класс

11.1. Найдите область определения и множество значений функции $\sqrt{1-\cos 2x+2\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x+\sin x}}$.

Ответ: область определения $2k\pi < x < 2k\pi+\pi,\ k\in Z$; множество значений $[2\sqrt[4]{2},+\infty)$.

Решение. Поскольку $1-\cos 2x+2\sin x=2\sin^2 x+2\sin x$, то $y(t)=\sqrt{2}t+\dfrac{1}{t}$, где $t=\sqrt{\sin^2 x+\sin x}$. Область определения $\sin^2 x+\sin x>0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x+1)>0 \Leftrightarrow \sin x>0$ (т.к. $\sin x\geq -1$) $\Leftrightarrow 2k\pi < x < 2k\pi+\pi,\ x\in Z$. Величина t на области определения ограничена значениями $0<t\leq\sqrt{2}$ (т.к. $\sin^2 x+\sin x$ возрастает вместе с $\sin x>0$). Далее, исследуя функцию $y(t)$, получаем точку минимума $t_0=2^{-1/4}<\sqrt{2}$ и соответствующее значение $y(t_0)=2\sqrt[4]{2}$ (см. аналогичное решение в задаче 11.2 за 19.12.2015). Отсюда следует результат.

11.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+y^2+2x=|x-a|-1$ имеет два корня.

Ответ: таких a не существует. **Решение**. См. задачу 10.3.

11.3. Можно ли на координатной плоскости построить квадрат с вершинами в целочисленных точках и с площадью, **а**) равной 2000; **б**) равной 2015?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя. **Решение**. **а**) Поскольку $2000=20^2\cdot 5=20^2(2^2+1^2)$, то квадрат построить можно. Действительно, рассмотрим вершины $A(0;0),\ B(-20;40)$, $C(20;60),\ D(40;20)$. Длины всех сторон четырехугольника $ABCD$ равны $\sqrt{20^2+40^2}=\sqrt{2000}$, а соседние стороны перпендикулярны (что следует из равенства нулю скалярного произведения векторов соседних сторон: например $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=(-20)\cdot 40+40\cdot 20=0$; или это следует из рассмотрения угловых коэффициентов соседних сторон: их произведение равно –1). **б**) Покажем, что 2015 нельзя представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. Действительно, поскольку квадраты целых чисел при делении на 4 дают остаток 0 или 1, сумма двух квадратов дает остаток 0, 1 или 2. Но 2015 дает остаток 3 при делении на 4, что противоречит возможности такого представления, и, значит, квадрат построить нельзя.

11.4. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1=2^{20}$, $a_{n+1}=s(a_n)$ при всех n, где $s(a)$ означает сумму цифр натурального числа a. Найдите a_{100}.

Ответ: 5. **Решение**. См. задачу 10.4.