10 класс

10.1. Существуют ли числа a, b, удовлетворяющие соотношению $a^2+3b^2+2=3ab$?
Ответ: не существуют. **Решение**. См. задачу 9.1.

10.2. Дан ΔABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно. Известно, что $MN \parallel AC$ и $BN = 1$, $MN = 2$, $AM = 3$. Докажите, что $AC > 4$.
Решение. См. задачу 9.3.

10.3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+y^2+2x=|x-a|-1$ имеет два корня.
Ответ: таких a не существует. **Решение**. Имеем одно уравнение с двумя неизвестными x, y. В общем (неисключительном) случае оно представляет собой некоторую кривую на координатной плоскости, т.е. уравнение имеет бесконечное множество решений. Проверим, что данное уравнение не является исключением. Запишем уравнение в виде $(x+1)^2+y^2=|x-a|$. При $x=-1$ уже есть два решения (при любых $a\neq -1$), соответствующие двум значениям $y=\pm\sqrt{a+1}$. При $a\neq -1$ и для значений x, близких к -1 число $|x-a|-(x+1)^2$ будет положительным, и значит, для каждого такого x есть два значения y (и значит, уравнение имеет бесконечное множество решений). Осталось рассмотреть случай, когда $a=-1$. В этом случае имеем уравнение $(x+1)^2+y^2=|x+1|$. Заметим, что квадрат числа меньше модуля этого числа, если-гда число меньше единицы по модулю, поэтому величина $|x+1|-(x+1)^2$ будет положительной, когда $|x+1|< 1$ Значит и при $a=-1$ будет бесконечное множество решений.

10.4. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1=2^{20}$, $a_{n+1}=s(a_n)$ при всех n, где $s(a)$ означает сумму цифр натурального числа a. Найдите a_{100}.
Ответ: 5. **Решение**. Основной используемый факт – это то, что сумма цифр любого числа имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Этот факт доказывается точно так же, как известный признак деления на 9. Покажем, что последовательность a_n быстро убывает, пока не станет меньше 10, и после этого она, очевидно, становится постоянной. Действительно, если число n k-значное, то $n>10^{k-1}$, а $s(n)\le 9k<10^{\kappa/2}=\sqrt{10}^{\kappa}$ при $k\ge 4$ (последнее неравенство легко доказать по индукции). Начальное число $a_1=2^{20}$ меньше, чем 10^{1024}, т.к. $2^{2015}<(2^3)^{672}<10^{1024}$. Значит, $a_2<10^{528}$, $a_3<10^{256}$,…, $a_9<10^4$, т.е. a_9 имеет не более трех цифр. Поэтому $a_{10}\le 3\cdot 9 = 27$ и, очевидно, a_{12} < 10. Осталось найти остаток от деления 2^{2015} на 9. Поскольку 2^3 имеет вид $9p-1$ (т.е. имеет остаток 8 при делении на 9), то и $2^{2013}=(2^3)^{671}$ тоже имеет такой вид (как произведение нечетного числа сомножителей вида $9p-1$), а $2^{2015}=2^{2013}\cdot 4 = (9p-1)\cdot 4=9q+5$ (где $q=4p-1$).