## 10 класс

**10.1**. Докажите, что для любого натурального $n$ число $n^3+6n^2+12n+16$ составное.
**Решение**. См. задачу 9.1.

**10.2**. **а**) Дано квадратное уравнение $x^2-9x-10=0$. Пусть $a$ – его наименьший корень. Найдите $a^4-909a$. **б**) Для квадратного уравнения $x^2-9x+10=0$, у которого $b$ – наименьший корень, найдите $b^4-549b$.
**Ответ: а)** 910; **б)** –710. **Решение**. См. задачу 9.2.

**10.3**. Дан треугольник $ABC$, вписанный в окружность ω. Точка $M$ – основание перпендикуляра из точки $B$ на прямую $AC$, точка $N$ – основание перпендикуляра из точки $A$ на касательную к ω, проведенную через точку $B$. Докажите, что $MN \parallel BC$.
**Решение**. Рассмотрим четырехугольник $ANBM$. Около него можно описать окружность (с диаметром $AB$, т.к. углы $ANB$ и $AMB$ – прямые). Значит, $\angle BNM = \angle BAC$ (по свойству вписанных углов). Далее, угол между касательной через точку $B$ и хордой $BC$ также равен углу $BAC$ (по свойству угла между касательной и хордой). Таким образом, отрезки $NM$ и $BC$ имеют одинаковые углы с касательной и поэтому параллельны.

**10.4**. **а)** Исследуйте функцию $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ на четность (нечетность). **б**) Найдите область определения и множество значений этой функции.
**Ответ: а)** функция нечетная; **б)** область определения $(-\infty,\infty)$, множество значений (–1; 1).
**Решение**. Поскольку $\sqrt{x^2+1}>|x|$, то $\sqrt{x^2+1}+x+1>0$ при всех $x$. Значит, область определения $(-\infty,\infty)$. Преобразуем выражение для $y$, домножив числитель и знаменатель на множитель $\sqrt{x^2+1}-(x+1)$. Заметим, что этот множитель равен нулю лишь при $x = 0$ (это следует из того, что $\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow x^2+1=x^2+2x+1$). После домножения знаменатель будет равен $-2x$, а числитель $2(1-\sqrt{x^2+1})$ (в обоих случаях используется формула для разности квадратов). Таким образом, при $x\neq 0$ имеем $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$. Очевидно, эта функция нечетная (при $x = 0$ исходное выражение для $y$ дает значение $y = 0$). Поэтому достаточно рассмотреть $x>0$. Множество значений можно найти, исследовав данную функцию с помощью производной. Но можно обойтись без производной следующим образом. Множество значений $y$ – это множество тех параметров $t$, для которых уравнение $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=t$ имеет решение (заметим, что $t>0$ при $x>0$). Имеем $\sqrt{x^2+1}=tx+1 \Leftrightarrow x^2+1=t^2x^2+2tx+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{2t}{1-t^2}$.
Поскольку мы рассматриваем $x>0$, то $0<t<1$. Учитывая нечетность функции, получаем множество значений (–1; 1).

**10.5**. В квадрате со стороной 1 отметили 53 точки, из которых четыре являются вершинами квадрата, а остальные (произвольные) 49 точек лежат внутри. Докажите, что найдется треугольник с отмеченными вершинами, имеющий площадь не более 0,01.
**Решение**. См. задачу 9.5.