Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика (отборочный тур) 20.12.2014
Время выполнения заданий – 90 минут.

1 вариант

7 класс

7.1 Вася и Толя обменялись значками. До обмена у Васи было на 5 значков больше, чем у Толи. После того, как Вася обменял 24% своих значков на 20% значков Толи, у Васи стало на один значок меньше, чем у Толи. Сколько значков было у мальчиков до обмена?

Ответ. У Толи было 45 значков, у Васи – 50 значков. **Решение.** Пусть до обмена у Толи было x значков, тогда у Васи было (x + 5) значков. После обмена у Толи стало $x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}$, а у Васи $x+5-(x+5)\cdot\frac{6}{25}+\frac{x}{5}$.

Решая уравнение

$$x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-x-5+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-\frac{x}{5}=1,$$

находим $x = 45$.

7.2. Существуют ли дробные (нецелые) числа x, y такие, что оба числа $13x+4y$ и $10x+3y$ целые?

Ответ. Не существуют. **Решение**. Пусть $13x + 4y = m$, $10x + 3y = n$, где m и n – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 3, а второе – на 4. Вычитая уравнения, получим $x = -3m + 4n$, т.е. x – целое число.

7.3. Найдется ли среди первых 500 натуральных чисел 1, 2, …, 500 серия, состоящая из подряд идущих **а)** девяти составных чисел; **б)** одиннадцати составных чисел?

Ответ: **а)** да; **б)** да. **Решение**. Можно привести искомую серию из 11 составных чисел: 200, 201, …, 210. Объясним сначала, как найти подобную серию из 9 составных чисел. Есть 4 простых числа меньше 10: это 2, 3, 5, 7. Их произведение равно 210. Поэтому при любом целом k каждая из двух серий $210k-2, 210k-3, ..., 210k-10$ и $210k+2, 210k+3, ..., 210k+10$ состоит из 9 составных чисел. Это отвечает на вопрос пункта а) при k = 1 или 2. Если заметить, что $209 \vdots 11$, то получим ответ на вопрос б).

7.4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Оказалось, что периметр ΔAMC равен периметру ΔCNA, а периметр ΔANB равен периметру ΔCMB. Докажите, что ΔABC равнобедренный.

Решение. Будем обозначать периметр буквой P. Из условия задачи имеем $P(\Delta AMC) + P(\Delta CMB) = P(\Delta CNA) + P(\Delta ANB)$. Отсюда $P(\Delta ABC) + 2 \cdot CM = P(\Delta ABC) + 2 \cdot AN$. Значит $CM = AN$. Из этого соотношения, учитывая равенство периметров треугольников AMC и CAN, получим, что $AM = NC$. Поэтому треугольники AMC и CAN равны по трем сторонам. Тогда $\angle A = \angle C$, значит, ΔABC равнобедренный.

8 класс

8.1. Вася и Толя обменялись значками. До обмена у Васи было на 5 значков больше, чем у Толи. После того, как Вася обменял 24% своих значков на 20% значков Толи, у Васи стало на один значок меньше, чем у Толи. Сколько значков было у мальчиков до обмена?

Решение. См. Задачу 7.1.

8.2. Существуют ли натуральные числа m, n такие, что $m^2=n^2+2014$?

Ответ: нет. **Решение**. Один способ решения заключается в разложении разности квадратов на множители, которые, очевидно, одинаковой четности, но это противоречит тому, что 2014 делится на 2, но не делится на 4. Другое решение заключается в рассмотрении остатков при делении на 4: квадраты целых чисел дают остаток 0 или 1. Но в правой части уравнения тогда получится остаток либо 2 либо 3, это приводит к противоречию.

8.3. Можно ли числа 1, 2, 3, …, n переставить так, чтобы соседние числа в ряду отличались либо на 3, либо на 5 , если **а**) n=25; **б**) n=1000.

Ответ: **а**) можно; **б**) можно. **Решение**. Числа можно переставить так:

а) **1**,4,7,2,5,8,3,6,**9**,12,15,10,13,16,11,14,**17**,20,23,18,21,24,19,22,**25**. **б**) Решение пункта а) показывает, как последовательно переставлять восьмерки вида чисел $8k+1, 8k+2, ..., 8k+8$, а именно: $8k+1, 8k+4, 8k+7, 8k+2, 8k+5, 8k+8, 8k+3, 8k+6$, $8(k+1)+1$ и переходить к следующей восьмерке. Таким образом можно переставить числа 1, 2,…, n, когда n имеет вид $4m$ или $4m + 1$. Поскольку 1000 делится на 8, получим результат пункта б).

8.4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Оказалось, что периметр $\Delta\, AMC$ равен периметру $\Delta\, CNA$, а периметр $\Delta\, ANB$ равен периметру $\Delta\, CMB$. Докажите, что $\Delta\, ABC$ равнобедренный.

Решение. См. задачу 7.4

9 класс

9.1. Существуют ли натуральные числа m, n такие, что $m^2 = n^2 + 2014$?

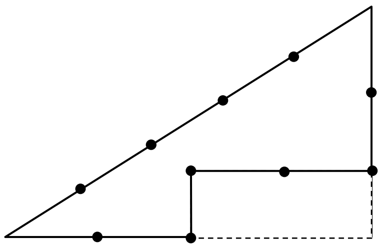
Ответ: не существуют. **Решение**. См. задачу 8.2

9.2. Можно ли числа 1, 2, 3, …, n переставить так, чтобы соседние числа в ряду отличались либо на 3, либо на 5 , если **а**) n=25; **б**) n=1000.

Ответ: **а**) можно; **б**) можно. **Решение**. См. задачу 8.3.

9.3. Имеется 12 спичек длиной 2 см каждая. Можно ли сложить из них многоугольник площади 16 см^2? (Спички нельзя ломать, требуется использовать все спички.)

Ответ: можно. **Решение**. Результат следует из теоремы Пифагора (т.к. $10^2 = 6^2 + 8^2$) и построения (см. рисунок). Площадь многоугольника равна $\dfrac{6\cdot 8}{2} - 8 = 16$.



9.4. В школьной математической олимпиаде 9-х классов участвовало 20 человек. В результате все участники набрали разное количество баллов, причем у каждого участника количество баллов меньше, чем в сумме у любых двух других. Докажите, что каждый участник набрал больше 18 баллов.

Решение. Пусть x, y - количество баллов участников, занявших последнее и предпоследнее место. Если предположить противное к утверждению задачи, то $x \le 18$. Поскольку $x < y$, то следующие по возрастанию количества баллов должны быть (по условию задачи) не меньше $y+1, y+2, ..., y+18$, соответственно. Таким образом, у победителя не менее $y + 18$ баллов, в то время как у занявших последние два места $x + y \le 18 + y$. Противоречие.

10 класс

10.1. Существуют ли такие рациональные нецелые числа x, y, что **а)** оба числа $19x+8y$ и $8x+3y$ целые?; **б)** оба числа $19x^2+8y^2$ и $8x^2+3y^2$ целые?

Ответ: **а)** существуют; **б)** не существуют. **Решение**. **а)** Если решить систему $\begin{cases} 19x+8y=1 \\ 8x+3y=1 \end{cases}$, то получим $x = \dfrac{5}{7}$, $y = \dfrac{-11}{7}$ (конечно, для подобного примера правые части системы можно выбирать многими способами). **б)** Пусть $\begin{cases} 19x^2+8y^2=m \\ 8x^2+3y^2=n \end{cases}$ (m и n целые). Решая систему, получим $7x^2=8n-3m$, $7y^2=8m-19n$, Обозначим $k=8n-3m$ и предположим, от противного, что $x=\dfrac{p}{q}$ - несократимая дробь, где $q>1$. Тогда $7p^2=kq^2$. Если q делится на 7, то отсюда и p должно делиться на 7, что противоречит несократимости дроби $\dfrac{p}{q}$. Значит, на 7 делится k, т.е. $k=7l$ (где l целое), и поэтому $p^2=lq^2$, поэтому l должно быть точным квадратом: $l=l_1^2$ (где l_1 целое). Итак, $x=\dfrac{p}{q}=l_1$ – целое число. Получили противоречие.

10.2. Имеется 12 спичек длиной 2 см каждая. Можно ли сложить из них многоугольник площади 16 см^2? (Спички нельзя ломать, требуется использовать все спички.)

Ответ: можно. **Решение**. См. задачу 9.3.

10.3. Существуют ли выпуклый шестиугольник и точка *М* внутри него такие, что все стороны шестиугольника больше 1, а расстояние от *М* до любой вершины меньше 1?

Ответ. Не существует. **Указание**. Допустим, что такой шестиугольник *ABCDEF* существует. Рассмотрим 6 треугольников, основания которых – соответствующие стороны шестиугольника, а вершина – точка *M*. Тогда хотя бы в одном из этих треугольников угол при вершине *М* не больше 60° (т.к. сумма всех шести углов равна 360°). Пусть, для определенности, это $\angle AMB$. Тогда хотя бы один из углов при основании треугольника *AMB* (скажем, $\angle BAM$) больше или равен 60°. Но тогда для углов *AMB* и *BAM* получается противоречие с тем, что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона (или противоречие с тем, что против равных углов лежат равные стороны).

10.4. В школьной математической олимпиаде 10-х классов участвовало 20 человек. В результате все участники набрали разное количество баллов, причем у каждого участника количество баллов меньше, чем в сумме у любых двух других. Докажите, что каждый участник набрал больше 18 баллов.

Решение. См. задачу 9.4.

11 класс

11.1. Существуют ли такие рациональные нецелые числа *x*, *y*, что **а)** оба числа $19x+8y$ и $8x+3y$ целые?; **б)** оба числа $19x^2+8y^2$ и $8x^2+3y^2$ целые?

Ответ: **а)** существуют; **б)** не существуют. **Решение**. См. задачу 10.1.

11.2. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^3-6xy-8y^3=1 \end{cases}$.

Ответ. Множество решений представляет собой прямую $y=\dfrac{x-1}{2}$. **Решение.** Второе уравнение есть следствие первого, так как

$$x^3-8y^3-6xy=(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)-6xy=$$
$$=x^2+2xy+4y^2-6xy=(x-2y)^2=1.$$

11.3. Существуют ли выпуклый шестиугольник и точка *М* внутри него такие, что все стороны шестиугольника больше 1, а расстояние от *М* до любой вершины меньше 1?

Решение. См. задачу 10.3

11.4. Дана последовательность $a_1 = \cos 10°$, $a_2 = \cos 100°, \ldots$, $a_n = \cos(10^n)°$ (градусов). **а)** Определите знак числа a_{100}; **б)** Докажите, что $|\ a_{100}| < 0{,}18$.

Ответ: **а)** $a_{100} > 0$. **Решение**. Покажем, что начиная с третьего члена последовательность становится постоянной: $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots = a_{100}$. Действительно, при $n \geq 3$: $10^{n+1} - 10^n = 9 \cdot 10^3 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}$, т.е. углы отличаются на величину, кратную 360°. Таким образом, нетрудно определить знак $\cos 1000° = \cos(360° \cdot 3 - 80°) = \cos 80° = \sin 10° > 0$. **б)** Воспользуемся известным неравенством $\sin x < x$ при всех $x > 0$ (здесь x – угол в радианах). (Это неравенство обычно доказывается при выводе первого замечательного предела; другой способ доказательства – рассмотреть функцию $y = x - \sin x$, которая возрастает, т.к. $y' = 1 - \cos x \geq 0$ и $y(0) = 0$.) Таким образом, $0 < \sin 10° = \sin \frac{10}{180}\pi < \frac{\pi}{18} < 0{,}18$; т.к. $18 \cdot 0{,}18 = 3{,}24 > \pi$.

2 вариант

7 класс

7.1. Грузовик и легковой автомобиль движутся в одном направлении по соседним полосам со скоростью 65 км/ч и 85 км/ч соответственно. На каком расстоянии между собой они будут через 3 минуты после того, как поравняются?

Ответ: 1 км. **Решение**. Разность скоростей автомобилей равна 20 км/ч, поэтому за 3 минуты они разъедутся на расстояние, равное 20 (км/ч) $\cdot \dfrac{1}{20}$ (час) = 1 км.

7.2. На прямой отметили несколько точек, после этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по две точки, затем такую же процедуру (со всей совокупностью точек) проделали еще раз. Могло ли в результате на прямой оказаться 82 точки?

Ответ: да. **Решение**. Пусть вначале на прямой было отмечено x точек. Тогда после первой процедуры к ним добавилось 2(x – 1) точек и всего стало 3x–2 точек. После второй процедуры к этим точкам добавилось 2(3x – 3) точек. Итак, всего на прямой оказалось 3x–2 + 2(3x – 3) = 9x – 8. Таким образом, надо решить уравнение в целых числах 9x – 8 = 82. Отсюда x=10. Значит, если вначале было 10 точек, то в результате двух процедур будет 82 точки..

7.3. Коля хочет на своем калькуляторе перемножить все натуральные делители числа 1024 (включая само число). Сможет ли он получить результат на экране, имеющем 16 десятичных разрядов?

Ответ: Не сможет.. **Решение**_ Натуральные делители числа $1024 = 2^{10}$ – это числа $1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$. Их произведение равно $2^{1+2+\ldots+10} = 2^{55}$. Поскольку $2^{10} = 1024 > 10^3$ и $2^5 = 128 > 10$, то $2^{55} = (2^{10})^5 \cdot 2^5 > (10^3)^5 \cdot 10 = 10^{16}$, т.е. 2^{55} записывается не менее, чем 17 цифрами.

7.4. В треугольнике ABC углы A и C при основании равны 20° и 40° соответственно. Известно, что $AC - AB = 5$ (см). Найдите длину биссектрисы угла B.

Ответ: 5 см. **Решение**. Пусть BM – биссектриса угла B. Отметим на основании AC точку N так, что $AN = AB$. Тогда треугольник ABN равнобедренный и $\angle ABN = \angle ANB = 80°$. Поскольку $\angle ABM = \dfrac{180° - 20° - 40°}{2} = 60°$, то $\angle BMN = \angle A + \angle ABM = 20° + 60° = 80°$. Таким образом, углы при основании ΔMBN равны, а значит, ΔMBN равнобедренный: $MB = BN$. В ΔBNC углы $\angle NCB$ и $\angle CNB$ равны 40° (т.к. $\angle BNC = 180° - 80° = 100°$ и $\angle NBC = 180° - 40° - 100° = 40°$). Поэтому ΔBNC равнобедренный: $BN = NC$. В результате имеем $BM = BN = NC = 5$ см (т.к. $NC = AC - AN = AC - AB$).

8 класс

8.1. Грузовик и легковой автомобиль движутся в одном направлении по соседним полосам со скоростью 65 км/ч и 85 км/ч соответственно. На каком расстоянии между собой они будут через 3 минуты после того, как поравняются?

Ответ: 1 км. **Решение**. См. задачу 7.1.

8.2. На прямой отметили несколько точек, после этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по две точки, затем такую же процедуру (со всей совокупностью точек) проделали еще раз. Могло ли в результате на прямой оказаться 82 точки?

Ответ: да. **Решение**. См.задачу 7.2.

8.3. В треугольнике ABC углы A и C при основании равны 20° и 40° соответственно. Известно, что $AC - AB = 5$ (см). Найдите длину биссектрисы угла B.

Ответ: 5 см. **Решение**. См. задачу 7.4.

8.4. Имеется n палочек длины 1, 2, …, n. Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат **а)** при $n = 12$; **б)** при $n = 15$?

Ответ: **а**) 2 палочки; **б**) Можно. **Решение**. **а**) Так как сумма 1 + 2 + … + 12 = 78 не делится на 4, то сложить квадрат нельзя. Сторона квадрата должна быть $\dfrac{78}{4} = 19{,}5$. Если сломать только одну палочку, то ее части могут оказаться на двух разных сторонах квадрата, а другие две стороны не смогут иметь нецелую длину. Значит, надо сломать как минимум две палочки. С двумя сломанными палочками можно сложить квадрат. Например, сломаем пополам палочки длины 1 и 3. Тогда квадрат можно сложить так: ($\frac{1}{2}$ + 12 + 7), ($\frac{1}{2}$ + 11 + 8), ($\frac{3}{2}$ + 10 + 2 + 6), ($\frac{3}{2}$ + 9 + 5 + 4). **б**) При n=15 квадрат можно сложить, например, так: (15 + 14 + 1), (13 + 12 + 5), (11 + 10 + 9), (8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2).

9 класс

9.1. Замените две звездочки двумя числами так, чтобы получилось тождественное равенство: $(2x+*)^3 = 5x^3 + (3x+*)(x^2 - x - 1) - 10x^2 + 10x$.

Ответ: первую звездочку заменяем на –1, вторую на 1. **Решение**. Пусть a – значение первой звездочки, b – значение второй. Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, после приведения подобных (и после проверки, что при x^3 в правой и левой частях одинаковые коэффициенты, равные 8) будем иметь систему

$$\begin{cases} 12a = -3 + b - 10 \\ 6a^2 = -3 - b + 10 \\ a^3 = -b. \end{cases}$$

Подставляя $b = 12a + 13$ из первого уравнения во второе, получим $6a^2 + 12a + 6 = 0$. Отсюда a =–1, b = 1, и проверкой убеждаемся, что третье уравнение для этих значений удовлетворяется.

9.2. В треугольнике *ABC* сторона *BC* равна отрезку *AM*, где *M* – точка пересечения медиан. Найдите угол $\angle BMC$.

Ответ: 90°. **Решение**. Пусть *AN* – медиана. По свойству точки пересечения медиан $MN = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BC$. Таким образом, в треугольнике *BMC* медиана *MN* равна половине стороны *BC*. Значит Δ *BMN* прямоугольный с прямым углом *BMN* (это известный факт, который легко доказать, рассматривая равнобедренные треугольники *BMN* и *CMN*: удвоенная сумма углов при их основании равна 180°).

9.3. Какое наименьшее количество цифр нужно приписать справа к числу 2014, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

Ответ: 4 цифры. **Решение**. Если к 2014 приписать три цифры, то получится число ≤ 2 014 999. Разделив 2 014 999 на 2520 = НОК(1,2,…,9), получим частное 799 и остаток 1519. Поскольку 1519 > 1000, то между числами 2014000 и 2014999 нет целого кратного 2520. Значит, приписать три цифры к 2014 нельзя. Отсюда следует, что одну или две цифры тоже нельзя приписать (иначе можно было бы дописать нули до трёх цифр). Четырех цифр будет достаточно, т.к. 10000 > 2520, и поэтому между 20140000 и 20149999 есть целое кратное 2520 (наименьшее из таких чисел 20142360 = 2520 · 7993).

9.4. Имеется *n* палочек длины 1, 2, …, *n*. Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат **а)** при *n* = 12; **б)** при *n* = 15?

Ответ: **а**) 2 палочки; **б**) Можно. **Решение**. См. задачу 8.4.

10 класс

10.1. Замените две звездочки двумя числами так, чтобы получилось тождественное равенство: $(2x+*)^3 = 5x^3 + (3x+*)(x^2 - x - 1) - 10x^2 + 10x$.

Ответ: первую звездочку заменяем на –1, вторую на 1. **Решение**. См. задачу 9.1.

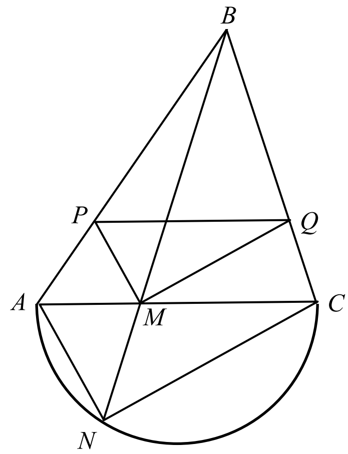
10.2. Какое наименьшее количество цифр нужно приписать справа к числу 2014, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

Ответ: 4 цифры. **Решение**. См. задачу 9.3.

10.3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + y = 2$.

Ответ: искомое множество точек – это совокупность двух прямых $y = -x - 2$ и $y = -2x + 1$. **Решение**. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно y: $y^2 + y(3x+1) + 2x^2 + 3x - 2 = 0$. Его дискриминант равен $D = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, а решения $y_1 = -x - 2,\ y_2 = -2x + 1$. Эти решения представляют собой две прямые на координатной плоскости.

10.4. Дан $\Delta\, ABC$ и точка M на отрезке AC (отличная от его концов). Постройте с помощью циркуля и линейки точки P и Q на боковых сторонах AB и BC так, чтобы $PQ \parallel AC$ и $\angle\, PMQ = 90°$.



Решение. Пусть P, Q – искомые точки. При гомотетии с центром в точке B и коэффициентом $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CB}{BQ}$ отрезок PQ перейдет в AC, а точка M – в некоторую точку N. Тогда $\angle ANC = \angle PMQ = 90°$. Таким образом, точка N лежит на полуокружности (по другую сторону от треугольника ABC) с диаметром AC. Из этого анализа следует построение. Проведем полуокружность с диаметром AC и пусть N – точка пересечения прямой BM с этой полуокружностью. Далее, проведем через точку M две прямые, параллельные AN и CN. Точки пересечения этих прямых со сторонами AB и BC и будут искомыми точками P, Q. Действительно, $\angle PMQ = \angle ANC = 90°$ в силу параллельности. Из подобия треугольников BAN и BPM следует, что $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{NB}{MB}$, и аналогично, из подобия треугольников BCN и BQM следует, что $\dfrac{CB}{QB} = \dfrac{NB}{MB}$. Значит, $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{CB}{QB}$, и по теореме Фалеса $PQ \parallel AC$.

11 класс

11.1. Решите уравнение $\sin^2 x + 1 = \cos(\sqrt{2}\,x)$.

Ответ. $x = 0$. **Решение.** Левая часть уравнения ≥ 1, а правая ≤ 1. Значит, уравнение равносильно системе: $\sin x = 0,\ \cos\sqrt{2}x = 1$. Имеем $x = \pi n$, $\sqrt{2}x = 2\pi k$ (n, k – целые). Отсюда $n = k \cdot \sqrt{2}$. Поскольку $\sqrt{2}$ – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при $n = k = 0$.

11.2. Докажите, что у пифагорова треугольника радиус вписанной окружности является целым числом. (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.)

Решение. Пусть a, b – катеты, c – гипотенуза, r – радиус вписанной окружности. Тогда $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (формула следует из рассмотрения отрезков, на которые делятся стороны точками касания). Поскольку $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, то числа c и $(a + b)$ одинаковой четности. Отсюда следует результат.

11.3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + y = 2$.

Ответ: искомое множество точек – это совокупность двух прямых $y = -x - 2$ и $y = -2x + 1$. **Решение**. См. задачу 10.3.

11.4. Дан $\Delta\, ABC$ и точка M на отрезке AC (отличная от его концов). Постройте с помощью циркуля и линейки точки P и Q на боковых сторонах AB и BC так, чтобы $PQ \parallel AC$ и $\angle\, PMQ = 90°$.

Решение. См. задачу 10.4.