Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2015

**Общие критерии оценивания**

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов, таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

| **Символы-Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
|---|---|
| + **20** | Полное верное решение |
| +. **16** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| ± **12** | Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| $\frac{+}{2}$ **10** | Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка. |
| ∓ **8** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| −. **4** | Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения. |
| − **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 **0** | Решение отсутствует (участник не приступал) |

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком –стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

**Решения**

**7 класс**

**7.1**. Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью $V$. Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости $V$. Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

**Ответ:** больше запланированного. **Решение**. Пусть $a$ – длина дистанции. Тогда запланированное время равно $\frac{a}{V}$, а реальное время равно $\frac{a}{2\cdot 1{,}25V}+\frac{a}{2\cdot 0{,}8V}=\frac{a}{V}\cdot\frac{41}{40}>\frac{a}{V}$.

**7.2**. Можно ли расставить на ребрах куба 12 чисел 1, 2, …, 12 так, чтобы произведение четырех чисел верхней грани равнялось произведению четырех чисел нижней грани?

**Ответ:** можно. **Решение**. Можно привести такой пример расстановки: на верхней грани расставим числа 2, 4, 9, 10; на нижней грани – числа 3, 5, 6, 8; остальные числа 1, 7, 11, 12 расставим на боковых ребрах. Произведения на верхней и нижней гранях совпадают и равны 720. (Чтобы прийти к подобному примеру, нужно отобрать простые числа 7 и 11 для боковых ребер и распределить степени двойки и тройки на верхней и нижней грани, что значительно уменьшает перебор.)

**7.3**. Если первую цифру двузначного натурального числа $N$ умножить на 4, а вторую умножить на 2, то в сумме полученные после умножения числа дадут $\frac{N}{2}$. Найдите $N$ (укажите все решения).

**Ответ:** три решения**:** $N = 32$; 64; 96. **Решение**. Пусть $x$ – первая цифра, $y$ – вторая цифра числа $N$. Тогда условие задачи запишется так $4x + 2y = \frac{10x + y}{2} \Leftrightarrow 2x = 3y$. Значит, цифра $x$ делится на 3 и $x \neq 0$ (поскольку $x$ – первая цифра). Отсюда получается три решения: $x = 3$, либо $x = 6$, либо $x = 9$, и соответственно $y = 2$, либо $y = 4$, либо $y = 6$.

**7.4**. Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты – самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

**Ответ:** можно. **Решение**. Сначала разобьем все монеты на 5 пар и за 5 взвешиваний сравним по весу каждую пару. Выделив в каждой паре более тяжелую монету, составим из таких монет "тяжелую" группу из 5 монет. Оставшиеся 5 монет составят "легкую" группу. Теперь в тяжелой группе за 4 последовательных взвешивания выберем самую тяжелую монету. Аналогично, в легкой группе за 4 взвешивания выделим самую легкую монету. Итого проведено 5+4+4=13 взвешиваний.

**7.5**. Из прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами $AC = 3$ и $CB = 7$ нужно вырезать квадрат с вершиной $C$ наибольшей площади. Чему равна сторона такого квадрата?

**Ответ:** 2,1. **Решение**. Введем систему координат: начало координат – в вершине $C$, ось $x$ – вдоль $CA$, ось $y$ – вдоль $CB$. Тогда гипотенуза лежит на прямой $y = 7 - \frac{7}{3}x$ (это следует из смысла углового коэффициента и свободного члена для графика прямой). Диагональ квадрата запишется уравнением прямой $y = x$, и поэтому точка пересечения этой прямой с гипотенузой получится из решения указанных уравнений $x = 7 - \frac{7}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{21}{10}$.

## 8 класс

**8.1**. Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью $V$. Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости $V$. Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

**Ответ:** больше запланированного. **Решение**. См. задачу 7.1.

**8.2**. В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.

**Ответ:** 49383. **Решение**. Заметим, что зачеркнутая цифра должна быть последней в числе $N$, т.к. в противном случае сумма двух чисел имела бы в последнем разряде четную цифру. Обозначим эту зачеркнутую цифру через $x$ и пусть $y$ – получившееся после зачеркивания четырехзначное число. Тогда условие запишется так: $10y + x + y = 54321 \Leftrightarrow 11y + x = 54321$. Разделив 54321 на 11 с остатком, получим $54321 = 11 \cdot 4938 + 3$ и учитывая, что $x < 11$, будем иметь единственное решение (в силу однозначного деления с остатком) $x = 3$, $y = 4938$.

**8.3**. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $P$ и $Q$ – середины сторон $AB$ и $CD$. Оказалось, что прямая $PQ$ делит диагональ $AC$ пополам. Докажите, что $PQ$ делит и диагональ $BD$ пополам.

**Решение**. Пусть $M$ – точка пересечения прямых $PQ$ и $AC$, $N$ – точка пересечения прямых $PQ$ и $BD$. По условию, $PM$ – средняя линия в треугольнике $ABC$, и поэтому $PM \parallel BC$. Тогда в треугольнике $BCD$ отрезок $NQ$ параллелен основанию $BC$ и проходит через середину боковой стороны $CD$. Значит (по теореме Фалеса) точка $N$ – середина $BD$.

**8.4**. Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты – самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

**Ответ:** можно. **Решение**. См. задачу 7.4.

**8.5**. **а)** Дана прямоугольная таблица размера 4×10 (клеток). Какое наибольшее количество крестиков можно поставить в клетки этой таблицы, чтобы выполнялось такое условие: в каждой строке и в каждом столбце таблицы должно стоять нечетное количество крестиков? **б)** Можно ли поставить несколько крестиков в таблицу размера 5×10, чтобы выполнялось указанное условие?

**Ответ: а)** 30; **б)** нельзя. **Решение**. **а)** Пусть в таблице 4 горизонтали и 10 вертикалей. В каждой вертикали есть хотя бы одна пустая (без крестика) клетка – иначе была бы вертикаль с 4 крестиками. Тогда всего крестиков в таблице не больше 3·10=30. Пример 30 крестиков см. на рисунке. **б)** Предположим, от противного, что для таблицы 5×10 расстановка существует. Тогда общее число крестиков в таблице, если считать по горизонталям, равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. получаем нечетное число. С другой стороны, если считать по вертикалям, получится сумма десяти нечетных чисел, т.е. четное число. Противоречие.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | × | × | × |
| × | × | × | × | × | × | × | | × | × |
| × | × | × | × | × | × | × | × | | × |
| × | × | × | × | × | × | × | × | × | |

## 9 класс

**9.1**. В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.

**Ответ:** 49383. **Решение**. См. задачу 8.2.

**9.2**. Даны четыре действительных числа $a$, $b$, $c$, $d$, которые удовлетворяют двум соотношениям: $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$. **а)** Докажите, что $a^5+b^5=c^5+d^5$; **б)** Можно ли сделать вывод, что $a^4+b^4=c^4+d^4$?

**Ответ: б)** нельзя. **Решение**. **а)** Запишем второе соотношение в виде $(a+b)(a^2-ab+b^2)=$ $=(c+d)(c^2-cd+d^2)$. В силу первого уравнения линейные множители в этом равенстве совпадают. Если они равны 0, то $a=-b$, $c=-d$ и тогда $a^5=-b^5$, $c^5=-d^5$, т.е. $a^5+b^5=c^5+d^5$=0 и утверждение доказано. Если $a+b=c+d\neq 0$, то после сокращения получим $a^2-ab+b^2==c^2-cd+d^2 \Leftrightarrow (a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd$, и поэтому $ab=cd$. Итак, пара $(a,b)$ и пара $(c,d)$ имеют совпадающие суммы и произведения и, значит, являются корнями одного и того же квадратного уравнения, т.е. эти пары (без учета порядка) совпадают. Отсюда следует результат.

**б)** Можно взять, например, $a=-b=1$, $c=-d=2$. Тогда $a^4+b^4=2\neq c^4+d^4=32$.

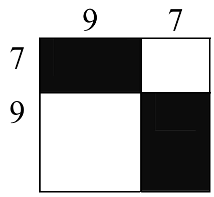
**9.3** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $P$ и $Q$ – середины сторон $AB$ и $CD$. Оказалось, что прямая $PQ$ делит диагональ $AC$ пополам. Докажите, что $PQ$ делит и диагональ $BD$ пополам.

**Решение**. См. задачу 8.3.

**9.4**. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце – нечетное количество крестиков. **а)** Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов? **б)** Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

**Ответ: а)** не может; **б)** можно. **Решение**. **а)** Предположим, от противного, что такая расстановка возможна. Подсчитаем сначала все крестики по строкам. Сумма двадцати нечетных чисел в нечетных строках даст четное число. Остальные строки таблицы – четные, и они не изменят четности общего количества крестиков. С другой стороны, если подсчитать крестики по столбцам, то получится сумма пятнадцати нечетных чисел плюс четно число в четных столбцах, т.е. получится нечетное число. Противоречие.

**б)** На рисунке показана расстановка крестиков (во всех клетках заштрихованных прямоугольников). Всего крестиков $7\cdot 9\cdot 2 = 126$, и во всех строках (столбцах) стоят 7 или 9 крестиков. (Прийти к такому примеру можно исходя из разложения 126 на множители.)




**9.5**. Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $AC = a$ и $CB = b$. Найдите **а)** сторону квадрата (с вершиной $C$) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике $ABC$; **б)** размеры прямоугольника (с вершиной $C$) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике $ABC$.

**Ответ: а)** $\dfrac{ab}{a+b}$; **б)** $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{b}{2}$. **Решение**. **а)** Решение пункта **а)** приведено в задаче 7.5 при $a$=3, $b$=7.

**б)** Пусть $x$, $y$ – стороны искомого прямоугольника. Пользуясь координатным методом (так же, как для пункта **а** ), получим, что $x$, $y$ удовлетворяют уравнению прямой, проходящей через точки (0; $b$) и ($a$; 0), т.е. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Требуется при этом условии найти наибольшее значение площади $S = xy$. Имеем $S = ab\cdot\left(\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{y}{b}\right)\le ab\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2=\dfrac{ab}{4}$. Здесь мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим; при этом равенство (наибольшее значение) достигается при $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{2}$. Другой способ для наибольшего значения получается при нахождении вершины квадратного трехчлена $S(x)=x\left(b-\dfrac{bx}{a}\right)$.

## 10 класс

**10.1**. Даны четыре действительных числа $a$, $b$, $c$, $d$, которые удовлетворяют двум соотношениям: $a+b=c+d$ .и $a^3+b^3=c^3+d^3$. **а)** Докажите, что $a^5+b^5=c^5+d^5$; **б)** Можно ли сделать вывод, что $a^4+b^4=c^4+d^4$?

**Ответ: б)** нельзя. **Решение**. См. задачу 9.2.

**10.2**. Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^2+2x+2\,|\,x+1\,|=a$ имеет ровно два корня.

**Ответ:** $a>-1$. **Решение**. Запишем уравнение в виде $(x+1)^2+2\,|\,x+1\,|=a+1$. Обозначим $t=|\,x+1\,|$, $t\ge 0$. Тогда получим квадратное уравнение $t^2+2t=a+1 \Leftrightarrow (t+1)^2=a+2$. С учетом того, что $t\ge 0$, должно выполняться неравенство $a+2\ge 1$, т.е. $a\ge -1$. При этом условии $t$ находится однозначно (с учетом $t\ge 0$): $t=\sqrt{a+2}-1$. При $a=-1$ исходное уравнение имеет единственное решение $x=-1$, а при $a>-1$ два решения: $x_{1,2}=\pm\left(\sqrt{a+2}-1\right)-1$.

**10.3**. Дана трапеция $ABCD$ и точка $M$ на боковой стороне $AB$, такая, что $DM\perp AB$. Оказалось, что $MC = CD$. Найдите длину верхнего основания $BC$, если $AD = d$.

**Ответ:** $\dfrac{d}{2}$. **Решение**. Пусть $N$ – середина нижнего основания $AD$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника $AMD$ имеем: $MN = AN = ND = \dfrac{d}{2}$. Рассмотрим $\Delta MCN$ и $\Delta DCN$. Они равны по трем сторонам. Тогда $\angle MCN = \angle DCN$ и поэтому в равнобедренном треугольнике $MCD$ биссектриса является высотой, т.е. $CN \perp MD$. Таким образом, $AB \parallel CN$ (как перпендикуляры к прямой $MD$). Значит, $ABCN$ – параллелограмм. Отсюда $BC = AN = \dfrac{d}{2}$.

**10.4**. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце – нечетное количество крестиков. **а)** Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов? **б)** Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

**Ответ: а)** не может; **б)** можно. **Решение**. См. задачу 9.4.

**10.5**. У Пети и Васи есть равные бумажные прямоугольные треугольники с катетами $a$ и $b$. Мальчики хотят вырезать по квадрату наибольшей площади так, чтобы у Петиного квадрата одна вершина совпадала с вершиной прямого угла треугольника, а Васин квадрат имел бы сторону, лежащую на гипотенузе. **а)** Найдите размеры обоих квадратов; **б)** Всегда ли (т.е. при любых ли катетах) Петин квадрат будет больше Васиного?

**Ответ: а)** $\dfrac{ab}{a+b}$ и $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$; **б)** всегда. **Решение**. **а)** Сторона Петиного квадрата вычислена в задаче 9.5. Пусть $x$ – сторона Васиного квадрата. Тогда гипотенуза разбивается на три отрезка длины, соответственно, $x\,\mathrm{tg}\,A$, $x$ и $x\,\mathrm{tg}\,B$. Отсюда получаем уравнение $x\dfrac{a}{b}+x+x\dfrac{b}{a}=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow x=\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$.

**б)** Докажем неравенство $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}<\dfrac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)\sqrt{a^2+b^2}<a^2+ab+b^2$. Обозначим $u=a+b,\ v=ab$, тогда неравенство запишется в виде $u\sqrt{u^2-2v}<u^2-v \Leftrightarrow u^2(u^2-2v)<u^4-2u^2v+v^2 \Leftrightarrow 0<v^2$.

## 11 класс

**11.1**. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{14-x^2}(\sin x-\cos 2x)=0$?

**Ответ: 6** корней. **Решение**. Область определения уравнения: $14-x^2\ge 0 \Leftrightarrow |x|\le\sqrt{14}$. На этой области решаем тригонометрическое уравнение $\sin x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sin x+2\sin^2 x-1=0$; $\sin x=\dfrac{-1\pm 3}{4}$, т.е. $\sin x=-1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$. Отсюда получаем три серии решений: 1) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; 2) $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; 3) $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$ $(k,n,m\in\mathbb{Z})$. Решения первой серии лежат в области определения только при $k=0$ (т.к. при $k\ne 0,\ |x|\ge 2\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}>\dfrac{9}{2}>\sqrt{14}$). Решения второй серии тоже лежат в области определения только при $n=0$ (т.к. $\left|\dfrac{\pi}{6}-2\pi\right|=\dfrac{11\pi}{6}>\dfrac{11}{2}>\sqrt{14}$). Решения третьей серии лежат в области определения при $m=0$ и $m=-1$. Действительно, $\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{5\cdot 3{,}6}{6}=3<\sqrt{14}$ и $\left|\dfrac{5}{6}\pi-2\pi\right|=\dfrac{7}{6}\pi<\dfrac{7\cdot 3{,}15}{6}=3{,}675<3{,}7$ и $(3{,}7)^2=13{,}69<14$. (При других $m$ имеем $\left|\dfrac{5}{6}\pi+2\pi m\right|>2\pi>\sqrt{14}$). Добавив корни первого множителя $\sqrt{14-x^2}$ исходного уравнении, а именно $\pm\sqrt{14}$, получим всего 6 корней.

**11.2**. Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^2+2x+2|x+1|=a$ имеет ровно два корня.

**Ответ:** $a>-1$. **Решение**. См. задачу 10.2.

**11.3**. Дана трапеция $ABCD$ и точка $M$ на боковой стороне $AB$, такая, что $DM\perp AB$. Оказалось, что $MC=CD$. Найдите длину верхнего основания $BC$, если $AD=d$.

**Ответ:** $\frac{d}{2}$. **Решение**. См. задачу 10.3.

**11.4**. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 55 натуральных делителей, считая единицу и само число.

**Ответ:** $2^{10}\cdot 3^4$. **Решение**. Если натуральное $n$ имеет вид $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_m$ – его различные простые делители, то количество натуральных делителей $n$ равно $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$ (это следует из общего вида делителя $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\ldots p_m^{i_m}$ числа $n$, $0\le i_1\le k_1$, $0\le i_2\le k_2,\ldots,0\le i_m\le k_m$). Тогда $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)=55=5\cdot 11$, и поэтому либо $m=1$, либо $m=2$. В первом случае $k_1=54$ и $n=p_1^{54}$. Во втором случае $k_1=4$, $k_2=10$, т.е. $n=p_1^4\cdot p_2^{10}$. Самые маленькие простые числа это 2 и 3. Поэтому осталось сравнить три числа; $2^{54}$, $2^4\cdot 3^{10}$ и $3^4\cdot 2^{10}$. Очевидно, наименьшее из них $2^{10}\cdot 3^4$.

**11.5**. В тетраэдре $SABC$ ребра $SA$, $SB$, $SC$ взаимно перпендикулярны и равны $a$, $b$, $c$ соответственно. **а)** Найдите сторону куба с вершиной $S$ наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре; **б)** Определите размеры прямоугольного параллелепипеда с вершиной $S$ наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре.

**Ответ: а)** $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; **б)** $\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}$. **Решение**. **а)** По аналогии с решением задачи 9.5 рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке $S$ и координатными осями вдоль $SA$, $SB$, $SC$. Тогда уравнение плоскости $ABC$ есть $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (это уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$). Диагональ куба, проходящая через $S$, имеет уравнение $x=y=z$. Подставляя его в уравнение плоскости $ABC$, получаем точку пересечения:
$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1\Leftrightarrow x=y=z=\frac{abc}{ab+bc+ac}.$$

**б)** По аналогии с задачей 9.5 имеем задачу на максимум функции объема $V=xyz$ при условии $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Этот максимум получается из неравенства средних для трех чисел:
$$V==xyz=abc\cdot\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}\right)\le abc\cdot\left(\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)/3\right)^3=\frac{abc}{27},$$
он достигается, когда
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{3}.$$