Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

Ответы и решения

9 класс

9.1. Какое из чисел больше: $\sqrt{100^2-99}+\sqrt{99^2-100}$ или $\sqrt{100^2-100}+\sqrt{99^2-99}$?

Ответ: второе число больше. **Решение**. Обозначим $a=100$, $b=99$, $A=\sqrt{a^2-b}+\sqrt{b^2-a}$, $B=\sqrt{a^2-a}+\sqrt{b^2-b}$. Имеем равносильные неравенства (после возведений в квадрат и уничтожения подобных членов) $A<B \Leftrightarrow A^2<B^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(a^2-b)(b^2-a)}<2\sqrt{(a^2-a)(b^2-b)} \Leftrightarrow -a^3-b^3<-ab^2-a^2b$ $\Leftrightarrow ab(a+b)<(a+b)(a^2-ab+b^2) \Leftrightarrow ab<a^2-ab+b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2>0$ (т.к. $a\neq b$).

9.2. Дано натуральное число n. Обозначим $N=n^4-90n^2-91n-90$. Докажите, что при $n>10$ **а)** N – составное натуральное число; **б)** N можно представить в виде произведения трех натуральных сомножителей, больших единицы.

Решение. См. задачу 8.2.

9.3. Натуральные числа m и n таковы, что $m\cdot n$ делится на $m+n$. Можно ли утверждать, что m делится на n, если известно, что **а)** n – простое число? **б)** n – произведение двух различных простых чисел?

Ответ: а) можно; **б)** нельзя. **Решение**. См. задачу 8.4.

9.4. Дан пятиугольник со сторонами (в некотором порядке) 1; 2; 5; 6; 7. Докажите, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.

Решение. Заметим следующий факт: если в пятиугольник можно вписать окружность, то сумма любых двух несмежных сторон пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон. Этот факт доказывается аналогично известному свойству четырехугольника (нужно сложить соответствующие отрезки, на которые стороны делятся точками касания, и воспользоваться равенством отрезков касательных из одной вершины). Поэтому, рассуждая от противного, получаем, что у стороны, равной 7, несмежными сторонами должны быть 1 и 2 (т.к. 7 + 5 > 1 + 2 + 6). Но тогда 5 и 6 – несмежные стороны, и опять получаем противоречие, т.к. 5 + 6 > 1 + 2 + 7.

9.5. 10 девочек и 10 мальчиков встали в ряд так, что девочки и мальчики чередуются, а именно слева направо стоят: девочка-мальчик-девочка-мальчик и т.д. Каждую минуту в одной (любой) паре соседей «девочка-мальчик» дети могут поменяться местами, при условии, что девочка стоит слева от мальчика. Может ли такой «обменный процесс» продолжаться больше часа?

Ответ: не может. **Решение**. См. задачу 8.5.