Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

Ответы и решения

8 класс

8.1. В 8а классе 33 ученика. В начале учебного года в классе организовали два кружка. По школьным правилам кружок можно организовать, если в него записалось не менее 70% всех учеников класса. Каково может быть наименьшее число учеников, записавшихся в оба кружка одновременно?

Ответ: 15 учеников. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. Дано натуральное число n. Обозначим $N = n^4 - 90n^2 - 91n - 90$. Докажите, что при $n > 10$ **а)** N – составное натуральное число; **б)** N можно представить в виде произведения трех натуральных сомножителей, больших единицы.

Решение. **а)** Конечно, пункт а) следует из разложения пункта б), но можно привести другое решение. Тот факт, что N – число составное, следует из его чётности (при условии, что $N > 2$), а чётность следует из того, что числа n^4 и $91n$ одинаковой чётности. Далее, $N = n^2\left(n^2 - 90 - \frac{91}{n} - \frac{90}{n^2}\right) > 100 \cdot (100 - 90 - 9{,}1 - 0{,}9) = 0$, и отсюда же следует, что большему значению n при $n > 10$ соответствует большее значение N. Проверка значения N при $n = 11$ дает $N = 2660 > 2$. **б)** Разложим N на множители: $N = n^4 - n - 90(n^2 + n + 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1) - 90(n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n - 90) = (n^2 + n + 1)(n - 10)(n + 9)$. При $n > 11$ все три скобки больше единицы. При $n = 11$ скобка $(n - 10)$ равна 1, но $n + 9 = 20 = 4 \cdot 5$, т.е. и при $n = 11$ имеем искомое разложение.

8.3. В треугольнике ABC биссектриса AM и медиана BN пересекаются в точке O. Оказалось, что площади треугольников ABM и MNC равны. Найдите $\angle MON$.

Ответ: 90°. **Решение**. Поскольку $S_{AMN} = S_{MNC}$ (т.к. $AN = NC$), из условия задачи имеем $S_{ABM} = S_{ANM}$. Поэтому в треугольниках ABM и AMN высоты, проведенные из вершин B и N, равны. Пусть B_1 и N_1 – основания этих высот. Тогда прямоугольные треугольники ABB_1 и ANN_1 равны, т.к. $BB_1 = NN_1$ и $\angle BAB_1 = \angle NAN_1$. Значит, $AB = AN$ и поэтому точки B_1 и N_1 совпадают между собой и совпадают с точкой O.

8.4. Натуральные числа m и n таковы, что $m \cdot n$ делится на $m+n$. Можно ли утверждать, что m делится на n, если известно, что **а)** n – простое число? **б)** n – произведение двух различных простых чисел?

Ответ: **а)** можно; **б)** нельзя. **Решение**. **а)** Пусть $n = p$ – простое число Имеем $mp = k(m + p)$ при некотором натуральном k. Если предположить, от противного, что m не делится на p, то из равенства $km = p(m - k)$ будет следовать, что k делится на p, т.е. $k = k_1 \cdot p$ при некотором натуральном k_1. Тогда, сокращая на p, получим $k_1 m = m - k$, но это приводит к противоречию (левая часть $\geq m$, а правая $< m$). **б)** Достаточно привести контрпример: $m = 35$, $n = 14 = 7 \cdot 2$, тогда $35 \cdot 14 = (35+14) \cdot 10$. Подобный пример основан на рассуждениях, подобных приведенным в пункте а). Если $n = p_1 \cdot p_2$ – произведение двух простых чисел ($p_2 > p_1$), то имеем $km = p_1 p_2 (m - k)$. Если взять $m = p_1 \cdot m_1$ и $k = p_2 \cdot k_1$ для некоторых $\cdot m_1$, k_1, то отсюда получаем соотношение $k_1(m_1 + p_2) = p_1 \cdot m_1$. Возьмем $\cdot m_1$ такое, что $m_1 + p_2 = p_1$, тогда при $k_1 = m_1$ данное соотношение выполняется. При $p_1 = 7$, $p_2 = 2$ получается приведенный контрпример.

8.5. 10 девочек и 10 мальчиков встали в ряд так, что девочки и мальчики чередуются, а именно слева направо стоят: девочка-мальчик-девочка-мальчик и т.д. Каждую минуту в одной (любой) паре соседей «девочка-мальчик» дети могут поменяться местами, при условии, что девочка стоит слева от мальчика. Может ли такой «обменный процесс» продолжаться больше часа?

Ответ: не может. **Решение**. Рассмотрим номера по порядку (слева направо) всех десяти мальчиков. Вначале это были все чётные числа 2, 4, 6,…, 20. Каждую минуту номер одного из мальчиков уменьшается на единицу, и пока номера мальчиков не станут равны 1, 2, 3, …, 10 (т.е. пока все мальчики не окажутся слева от всех девочек), процесс будет продолжаться. Сумма номеров мальчиков сначала была равна $(2 + 4 + \ldots + 20) = 2(1 + 2 + \ldots + 10) = 2 \cdot 55$, а в конце $(1 + 2 + \ldots + 10) = 55$. Значит, она уменьшится на 55. Поскольку эта сумма каждую минуту уменьшается на 1, весь процесс займет 55 минут.