

Ответы и решения

7 класс

7.1. Колонна автомобилей движется по шоссе со скоростью 80 км/ч и дистанцией 10 м между автомобилями. Проезжая знак ограничения скорости, все автомобили снижают скорость до 60 км/ч. С какой дистанцией будет двигаться колонна после знака?

Ответ: 7,5 м. **Решение.** Обозначим скорости $v_1 = 80$ км/ч, $v_2 = 60$ км/ч и дистанцию $a = 10$ м = 0,01 км. Вторая машина проезжает знак позже первой на $\frac{a}{v_1}$ (час). За это время первая ма-

шина проедет расстояние $v_2 \cdot \frac{a}{v_1} = 7,5$ м, с такой дистанцией машины будут двигаться дальше.

7.2. В 7а классе 33 ученика. В начале учебного года в классе организовали два кружка. По школьным правилам кружок можно организовать, если в него записалось не менее 70% всех учеников класса. Каково может быть наименьшее число учеников, записавшихся в оба кружка одновременно?

Ответ: 15 учеников. **Решение.** В каждом кружке должно быть не менее $33 \cdot 0,7 = 23,1$ человек, и значит, не менее 24 человек. Пусть n_1, n_2 – число учеников, записавшихся в первый и второй кружок соответственно, n – число учеников, записавшихся хотя бы в один кружок. Очевидно, $n \leq 33$ (заметим, что не обязательно $n=33$, т.к. в условии не сказано, что каждый ученик записался в какой-то кружок). Тогда число учеников, записавшихся в оба кружка, равно $n_1 + n_2 - n$, т.к. в сумме $n_1 + n_2$ дважды учтены записавшиеся в оба кружка. Таким образом, $n_1 + n_2 - n \geq 24 + 24 - 33 = 15$, и это число достигается, когда по 9 человек записались только в один кружок и 15 человек – в оба кружка.

7.3. В трехзначном числе зачеркнули первую цифру и получили двузначное. Если поделить исходное число на полученное, то частное равно 8, а остаток 6. Найдите исходное число.

Ответ: 342. **Решение.** Пусть a – первая цифра исходного числа, b – двузначное число из последних двух цифр. По условию $100a + b = 8b + 6 \Leftrightarrow 7b = 2(50a - 3) = 2 \cdot 49a + 2(a - 3)$. Таким образом, число $a - 3$ должно делиться на 7. Учитывая, что $0 < a \leq 9$, получаем, что $a = 3$. Тогда $b = 42$.

7.4. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 2014.

Ответ: 799...9 (223 девятки). **Решение.** Данный ответ интуитивно ясен: нужно как можно больше использовать девятки, а недостающую до 2014 цифру записать первой. Обоснуем это строго. Если в искомом числе было бы меньше 224 цифр, то сумма цифр не превосходила бы $223 \cdot 9 = 2007$; если бы первая цифра 224-значного числа была меньше 7, то сумма цифр не превосходила бы $6 + 223 \cdot 9 = 2013$.

7.5. Имеется 200 спичек. Сколько есть способов составить, используя все спички, квадрат и (отдельно) равносторонний треугольник? (Разные способы отличаются размерами квадрата и треугольника).

Ответ: 16. **Решение.** Пусть x (спичек) – длина стороны квадрата, y (спичек) – длина стороны треугольника. Тогда $4x + 3y = 200 \Leftrightarrow 3y = 4(50 - x)$. Таким образом, нужно для делимости на 3 рассмотреть в качестве x все натуральные числа до 50, дающие остаток 2 при делении на 3 (т.е. тот же остаток, что у числа 50). Имеем 16 таких чисел, а именно числа вида $2 + 3k, k = 0, 1, \dots, 15$, от 2 до 47 (само число 50 рассматривать не следует, т.к. иначе будет составлен только квадрат, без треугольника). Тогда соответствующее значение y равно $4 \cdot (16 - k)$.