Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

Ответы и решения

10 класс

10.1. Какое из чисел больше: $\sqrt{100^2-99}+\sqrt{99^2-100}$ или $\sqrt{100^2-100}+\sqrt{99^2-99}$?

Ответ: второе число. **Решение**. См. задачу 9.1.

10.2. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $|x+a|=\frac{1}{x}$ имеет ровно два корня.

Ответ: $a=-2$. **Решение**. Пересечение графиков правой и левой частей могут быть только в первом квадранте, т.к. $y=|x+a|$ проходит в 1-ом и 2-ом квадранте, а $y=\frac{1}{x}$ – в 1-ом и 3-ем. При $a\ge 0$ график $y=|x+a|$ в первом квадранте представляет собой прямую $y=x+a$, которая с гиперболой $y=\frac{1}{x}$ имеет ровно одну точку пересечения (т.к $y=\frac{1}{x}$ – убывающая функция). Рассмотрим теперь значения $a<0$. При $x \ge -a$ имеем (рассуждая аналогично) одну точку пересечения графиков. Поэтому требуется найти a такое, чтобы при $x \in (0;-a)$ была еще ровно одна точка пересечения. Имеем $-x-a=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+ax+1=0 \Leftrightarrow x=(-a\pm\sqrt{a^2-4})/2$, отсюда $a=-2$ (при $-2<a<0$ у квадратного уравнения корней нет, а при $a<-2$ – два положительных корня, меньших $|a|$).

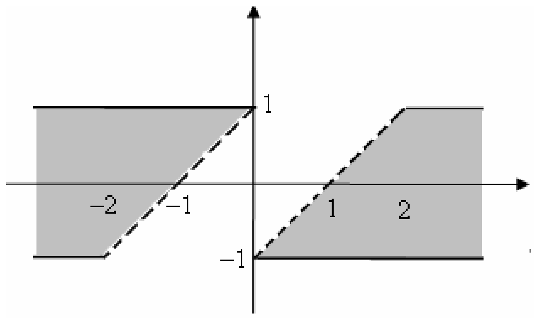
10.3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2-2xy}>\sqrt{1-y^2}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-2xy>1-y^2 \\ 1-y^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2>1 \\ |y|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow .$$

$$\text{ëèáî } \begin{cases} x-y>1 \\ |y|\le 1 \end{cases}, \text{ ëèáî } \begin{cases} x-y<-1 \\ |y|\le 1 \end{cases}$$

Решение совокупности данных двух систем изображено на рисунке.



10.4. Последовательность a_n задается соотношениями $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$; $a_1=\dfrac{1}{2}$. Докажите, что a_n монотонно возрастает и $a_n<2$ при всех n.

Решение. Докажем монотонность a_n. Имеем $a_{n+1}>a_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}>a_n \Leftrightarrow (a_n-1)^2>0$. Данное неравенство является строгим, т.к. на самом деле $a_n<1$, этот факт докажем методом математической индукции. Действительно, $a_1=\dfrac{1}{2}<1$, и если при $n=k$ неравенство $0<a_k<1$ выполняется, то при $n=k+1$ будем иметь $0<a_{k+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_k^2}{2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. **Замечание**. Данная задача дает пример того, что по индукции иногда более сильное утверждение (здесь $a_n<1$) легче доказать, чем более слабое ($a_n<2$), т.к. более сильное утверждение используется в индукционном шаге.

10.5. На координатной плоскости рассматривается семейство концентрических окружностей с центром в точке $M(\sqrt{2};\sqrt{3})$. **а)** Найдется ли окружность этого семейства, на которой есть две рациональные точки? **б)** Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2014 целочисленных точек. (Рациональная (целочисленная) точка – это точка с рациональными (соответственно, целыми) координатами.)

Ответ: а) не найдется. **Решение**. **а)** Предположим, от противного, что найдутся две рациональные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ на окружности данного семейства. Тогда $(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2$. Значит, $2(x_1-x_2)\sqrt{2}+2(y_1-y_2)\sqrt{3}=q$ – рациональное число. Если $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\ne 0$, то возведя последнее равенство в квадрат, получим, что $\sqrt{6}$ – рациональное число, что неверно. Если одна из разностей, например, x_1-x_2, равна 0, то при $y_1\ne y_2$ получаем противоречие с иррациональностью $\sqrt{3}$. Значит, двух различных рациональных точек на окружности быть не может. **б)** Заметим, что внутри круга малого радиуса целочисленных точек нет (можно взять радиус меньше расстояния от M до ближайшей целочисленной точки $A(1;2)$). С другой стороны, если взять достаточно большой радиус (например, больше 3000), то внутри круга окажется больше 2014 точек. Поскольку, в силу пункта а), при постепенном увеличении радиуса происходит скачок числа целочисленных точек только на единицу, то должен обязательно наступить момент, когда внутри круга будет ровно 2014 точек.