ны присутствовать хотя бы две двойки, т.к. иначе сумма цифр равнялась бы 100 (если двоек нет) или 101 (если одна двойка), и. N не делилось бы на 3. В случае двух двоек все условия выполнены, когда между ними четное количество единиц.

8.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

Ответ: 284160. См. задачу 7.2.

8.3. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

Ответ: "Поровну". См. задачу 7.4.

8.4. В треугольнике ABC биссектриса AM перпендикулярна медиане BK. Найдите отношения $BP:PK$ и $AP:PM$, где P – точка пересечения биссектрисы и медианы.

Ответ: $BP:PK = 1$, $AP:PM = 3:1$. **Решение.** Треугольники ABP и AKP равны (сторона AP – общая, и прилегающие к ней углы равны по условию). Значит, $AB = AK = KC$, $BP = PK$. Поэтому треугольники ABM и AKM равны (по двум сторонам и углу $\frac{\angle A}{2}$ между ними). Тогда $S_{ABM} = S_{AKM} = S_{CKM} = \; = \frac{S}{3}$, где $S = S_{ABC}$. Далее, $S_{ABP} = \frac{1}{2}S_{ABK} = \frac{1}{4}S$. Но $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BP$ (т.к. $AM \perp BP$), $S_{ABP} = \frac{1}{2}AP \cdot BP$. Отсюда $AM = \frac{2S}{3 \cdot BP}$, $AP = \frac{2S}{4 \cdot BP}$, т.е. $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}$ и поэтому AP: PM = 1: 3.

9 класс

9.1. Стозначное натуральное число N составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что N делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа N?

Ответ: две двойки и 98 единиц. См. задачу 8.1.

9.2. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = -a^2 + 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение xy ?

Ответ: Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1.

Решение. Имеем $2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - (-a^2 + 2) = 2(a^2 - 1)$, т.е. $xy = a^2 - 1$. Система $\begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 - 1 \end{cases}$ равносильна исходной (т.к. из нее с помощью указанных выше преобразований получается второе уравнение исходной системы). Решение полученной системы – это корни квадратного уравнения $t^2 - at + (a^2 - 1) = 0$ (по обратной теореме Виета). Дискриминант этого уравнения $D = a^2 - 4(a^2 - 1) = 4 - 3a^2$ должен быть неотрицательным, т.е. $0 \le a^2 \le \frac{4}{3}$. Поэтому $xy = a^2 - 1 \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

9.3. Сколько точек на гиперболе $y = \frac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?

Ответ: 16. **Решение.** Целочисленные точки в первом квадранте соответствуют натуральным делителям числа $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$. Количество таких делителей равно 8 (можно их выписать непосредственно или воспользоваться формулой $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$ для количества натуральных делителей числа $N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$.) С учетом симметричных точек в третьем квадранте получаем ответ.

9.4. В треугольнике *ABC* биссектриса *AM* перпендикулярна медиане *BK*. Найдите отношения $BP:PK$ и $AP:PM$, где P – точка пересечения биссектрисы и медианы.

Ответ: $BP:PK = 1$, $AP:PM = 3:1$. См. задачу 8.4.

10 класс

10.1. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=-a^2+2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение xy?

Ответ: Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1. См. задачу 9.2.

10.2. Сколько точек на гиперболе $y = \dfrac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?

Ответ: 16. См. задачу 9.3.

10.3. Существует ли такое число x, для которого оба числа $(\sin x+\sqrt{2})$ и $(\cos x-\sqrt{2})$ являются рациональными?

Ответ: Не существует. **Решение.** Предположим, от противного, что $\sin x+\sqrt{2}=p$, $\cos x-\sqrt{2}=q$, где p и q - рациональные числа. Тогда $1=\sin^2 x+\cos^2 x=(p-\sqrt{2})^2+(q+\sqrt{2})^2$ = $(p^2+q^2+4)-2(q-p)\sqrt{2}$. Если $q-p\neq 0$, то отсюда сразу получаем противоречие (в левой части – рациональное число, в правой – иррациональное). Если $p=q$, то $\sin x-\cos x=2\sqrt{2}$, что также приводит к противоречию, т.к. $|\sin x-\cos x|\le 2$, а $2\sqrt{2}>2$.

10.4. Дан прямоугольник, для которого численное значение площади больше периметра. Докажите, что периметр прямоугольника больше 16.

Решение. Пусть a, b – стороны прямоугольника. Из условия задачи $ab>2a+2b$ $\Leftrightarrow (a-2)(b-2)>4$ (*)

Сначала проверим, что оба множителя $(a-2)$ и $(b-2)$ положительны. Действительно, в противном случае из (*) следует, что $a-2<0$, $b-2<0$. Тогда $-2<a-2<0$, $-2\le b-2<0$ и поэтому $(a-2)(b-2)=(2-a)(2-b)<2\cdot 2=4$, что противоречит (*). Теперь для положительных чисел $(a-2)$ и $(b-2)$ можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $(a-2)+(b-2)\ge 2\sqrt{(a-2)(b-2)}>4 \Rightarrow a+b>8 \Leftrightarrow P>16$.

11 класс

11.1. Решите уравнение $2\cos^2 x+\sqrt{\cos x}=3$.

Ответ: $x=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Поскольку $2\cos^2 x+\sqrt{\cos x}\le 2\cdot 1+1=3$, то равенство может выполняться лишь при условии $\cos x=1$, откуда следует ответ.