9 класс

9.1. Докажите, что уравнение $x^{99} = 2013y^{100}$ имеет решения в натуральных числах *x*, *y*.

Решение. См. аналогичное решение задачи 8.2. В данном уравнении можно взять $x=2013^{99}$, $y=2013^{98}$.

9.2. Число *a* является корнем квадратного уравнения $x^2 - x - 50 = 0$. Найдите значение $a^3 - 51a$.

Ответ: 50. **Решение.** Имеем $a^2 = a + 50$, поэтому $a^3 = a^2 + 50a = a + 50 + 50a = 51a + 50$. Отсюда $a^3 - 51a = 50$.

9.3. Из 60 чисел 1, 2, …, 60 выбрали 25 чисел. Известно, что сумма любых двух из выбранных чисел не равна 60. Докажите, что среди выбранных чисел есть кратные пяти.

Решение. Предположим противное, тогда выбранные числа находятся среди первых 48 натуральных чисел, не кратных пяти. Заметим, что среди выбранных чисел не может оказаться пара вида (*a*, 60–*a*), т.е. в каждой такой паре имеется не более одного числа среди выбранных. Поскольку таких пар всего 48:2=24<25, получаем противоречие.

9.4. В треугольнике *ABC* со сторонами *AB* = *c*, *BC* = *a*, *AC* = *b* проведена медиана *BM*. В треугольники *ABM* и *BCM* вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с медианой *BM*.

Ответ: $\dfrac{|a-c|}{2}$. **Решение.** Пусть P_1, Q_1, L_1 – точки касания окружности, вписанной в треугольник *ABM* со сторонами *AB*, *AM* и *BM* соответственно. Аналогично, точки касания второй окружности со сторонами *BC*, *MC* и *BM*, обозначим P_2, Q_2, L_2. Требуется найти L_1L_2. Обозначим (используя свойство касательной) $AP_1 = AQ_1 = x_1$, $MQ_1 = ML_1 = y_1$, $BP_1 = BL_1 = z_1$, $CP_2 = CQ_2 = x_2$, $MQ_2 = ML_2 = y_2$, $BP_2 = BL_2 = z_2$. Имеем два равенства $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ (= *BM*) и $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ (т.к. *M* – середина *AC*). Складывая эти равенства, получим $2y_1 + (x_1 + z_1) = 2y_2 + (x_2 + z_2)$, т.е. $2y_1 + c = 2y_2 + a$. Значит, $L_1L_2 = |y_1 - y_2| = \dfrac{|a-c|}{2}$.

9.5. Сколько решений в натуральных числах *x*, *y* имеет система уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(x, y) = 20! \\ \text{НОК}(x, y) = 30! \end{cases} \qquad (\text{где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)?$$

Ответ: 2^8. **Решение.** Если для данных двух чисел *x*, *y* набор их простых делителей обозначить $p_1, p_2, \cdots, p_k$ и записать $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ (где α_i, β_i – неотрицательные целые числа), то

$$\text{НОД}(x, y) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОК}(x, y) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

Задача стоит так: для данных *A, B* найти *x*, *y* из уравнений $\text{НОД}(x, y) = A$, $\text{НОК}(x, y) = B$. Если разложения *A* и *B* имеют вид $A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, $B = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ и $n_1 = m_1$, то $\alpha_1 = \beta_1$. Если же $n_1 < m_1$, то либо $\alpha_1 = n_1$, $\beta_1 = m_1$, либо наоборот: $\alpha_1 = m_1$, $\beta_1 = n_1$. Аналогичное рассуждение справедливо для остальных индексов. Таким образом, различные решения (*x*, *y*) определяются указанным выбором для показателей n_i, m_i в случае $n_i < m_i$ (в каждом таком случае есть выбор из двух вариантов: кому – иксу или игреку – «отдать» показатель n_i или m_i). В данной задаче для числа *B*=30! имеем 8 простых делителей, для которых $m_i > n_i$, а именно 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 29 (все простые числа, меньшие 30, кроме 17 и 19). Поэтому количество различных вариантов выбора упорядоченных наборов α_i, β_i равно 2^8=256.