«Будущие исследователи – будущее науки». Математика.
Очный отборочный тур 19.01.2013. Продолжительность - 2 часа.

## 7 класс

**7.1**. Найдите два натуральных числа $m$ и $n$, если известно, что $m < n < 2m$ и $mn = 2013$.

**Ответ:** $m = 33$, $n = 61$.

**Решение** следует из разложения на простые множители $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ и небольшого перебора делителей числа 2013; всего их 8, причем «кандидатом» на роль числа $m$ являются меньшие делители, а именно четыре числа 1, 3, 11, 33 и из них условию $m < n < 2m$ удовлетворяет только $m=33$ при $n = 61$.

**7.2**. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

**Ответ:** 284160. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра встречается в разряде единиц столько раз, сколько есть трехзначных чисел с этой цифрой на конце. Значит, она встретится $8 \cdot 8 = 64$ раза (т.к. всего используется 8 цифр для разрядов сотен и десятков). Поэтому сумма цифр в последнем разряде равна $64 \cdot (1+2+3+4+6+7+8+9) = 2560$. Аналогично, в разряде десятков и сотен получим ту же сумму. В итоге получим $2560 \cdot 100 + 2560 \cdot 10 + 2560 = 2560 \cdot 111 = 284160$.

**7.3**. Дан прямоугольник, отличный от квадрата. Известно, что площадь прямоугольника численно равна его периметру. Докажите, что меньшая сторона прямоугольника меньше 4, а большая сторона – больше 4.

**Решение.** Пусть $a, b$ $(a < b)$ – стороны прямоугольника. По условию, $ab = 2a + 2b$, отсюда получаем равенство $(a-2)(b-2) = 4$. Если $a - 2 > 2$ и $b - 2 > 2$, то $(a-2)(b-2) > 4$, что противоречит полученному равенству. Аналогичное противоречие получается, когда оба числа $a - 2$ и $b - 2$ положительны, но меньше 2. Если оба числа $a - 2$ и $b - 2$ отрицательны, то $(a-2)(b-2) = (2-a)(2-b) < 2 \cdot 2 = 4$, что также невозможно. Значит, $a - 2 < 2$, $b - 2 > 2$, т.е. $a < 4$, $b > 4$.

**7.4.** На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

**Ответ:** "Поровну". **Решение.** Предположим сначала, что в компании больше пяти лжецов. Тогда первые пятеро сказали правду, и значит, они рыцари. Итак, рыцарей по меньшей мере пять, и, значит, наше предположение неверно. Предположим теперь, что в компании больше пяти рыцарей. Тогда среди первой пятерки должен оказаться рыцарь, и он должен был сказать правду, а на самом деле он сказал, что больше лжецов, т.е. опять приходим к противоречию. Значит, в компании 5 лжецов и 5 рыцарей. Поскольку первые пятеро сказали неправду, то они лжецы, а остальные – рыцари, и они сказали: "Поровну".

## 8 класс

**8.1**. Стозначное натуральное число $N$ составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что $N$ делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа $N$?

**Ответ:** две двойки и 98 единиц. **Решение.** Если в записи числа $N$ больше двух двоек, то рассмотрев любые три двойки, получим противоречие: действительно, между первой и второй двойкой – четное количество цифр, между второй и третьей – четное количество, а вместе с самой второй (т.е. средней) двойкой получится нечетное количество. С другой стороны, в записи числа $N$ должны присутствовать хотя бы две двойки, т.к. иначе сумма цифр равнялась бы 100 (если двоек нет) или 101 (если одна двойка), и. $N$ не делилось бы на 3. В случае двух двоек все условия выполнены, когда между ними четное количество единиц.

**8.2**. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

**Ответ:** 284160. См. задачу 7.2.

**8.3**. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

**Ответ:** "Поровну". См. задачу 7.4.

**8.4**. В треугольнике $ABC$ биссектриса $AM$ перпендикулярна медиане $BK$. Найдите отношения $BP:PK$ и $AP:PM$, где $P$ – точка пересечения биссектрисы и медианы.

**Ответ:** $BP:PK = 1$, $AP:PM = 3:1$. **Решение.** Треугольники $ABP$ и $AKP$ равны (сторона $AP$ – общая, и прилегающие к ней углы равны по условию). Значит, $AB = AK = KC$, $BP = PK$. Поэтому треугольники $ABM$ и $AKM$ равны (по двум сторонам и углу $\frac{\angle A}{2}$ между ними). Тогда $S_{ABM} = S_{AKM} = S_{CKM} = \ =\frac{S}{3}$, где $S = S_{ABC}$. Далее, $S_{ABP} = \frac{1}{2}S_{ABK} = \frac{1}{4}S$. Но $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM\cdot BP$ (т.к. $AM \perp BP$), $S_{ABP} = \frac{1}{2}AP\cdot BP$. Отсюда $AM = \frac{2S}{3\cdot BP}$, $AP = \frac{2S}{4\cdot BP}$, т.е. $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}$ и поэтому $AP$: $PM = 1: 3$.

## 9 класс

**9.1**. Стозначное натуральное число $N$ составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что $N$ делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа $N$?

**Ответ:** две двойки и 98 единиц. См. задачу 8.1.

**9.2**. Числа $x$, $y$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = -a^2 + 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение $xy$ ?

**Ответ:** Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1.

**Решение.** Имеем $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \ = \ a^2 - (-a^2+2) \ = \ 2(a^2-1)$, т.е. $xy = a^2 - 1$. Система $\begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 - 1 \end{cases}$ равносильна исходной (т.к. из нее с помощью указанных выше преобразований получается второе уравнение исходной системы). Решение полученной системы – это корни квадратного уравнения $t^2 - at + (a^2-1) = 0$ (по обратной теореме Виета). Дискриминант этого уравнения $D = a^2 - 4(a^2-1) = 4 - 3a^2$ должен быть неотрицательным, т.е. $0 \le a^2 \le \frac{4}{3}$. Поэтому $xy = a^2 - 1 \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

**9.3**. Сколько точек на гиперболе $y = \frac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?