8 класс

8.1. Докажите, что для любого натурального *n* число $n^3 + 9n^2 + 27n + 35$ составное.

Решение. Представим выражение в виде $(n+3)^3 + 2^3 = (n+5)\left((n+3)^2 - 2(n+3) + 4\right) = (n+5)(n^2 + 4n + 7)$, и каждый множитель, очевидно, больше единицы.

8.2. Имеет ли решение в натуральных числах x, y уравнение $x^9 = 2013y^{10}$?

Ответ: да. **Решение.** Будем искать решение в виде степеней числа 2013, т.е. x=2013^m, y=2013^n. Тогда $2013^{9m} = 2013^{1+10n}$, т.е. $9m - 1 = 10n$. Можно взять m=9 (наименьшее натуральное m, для которого последняя цифра числа 9m равна 1), тогда n=8.

8.3. Внутри данного треугольника ABC постройте (с помощью циркуля и линейки) точку M так, чтобы площади треугольников ABM, BCM и CAM совпадали.

Решение. Пусть BK – медиана и O – точка пересечения медиан в треугольнике ABC. Тогда по свойству медиан, $OK = \frac{1}{3}BK$. Поэтому высота в треугольнике AOC, опущенная на AC, втрое меньше высоты треугольника ABC (это следует из подобия соответствующих прямоугольных треугольников). Значит, $S_{AOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{AOB} = S_{BOC} = \, = \frac{1}{3}S_{ABC}$ Итак, искомая точка – это точка пересечения медиан. Заметим, что такая точка единственна: действительно, если взять другую точку M_1, то она попадет в какой-то из треугольников AOB, BOC или AOC – пусть, для определенности, в треугольник AOC – и тогда $S_{AM_1C} < S_{AOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Построение с помощью циркуля и линейки точки пересечения медиан сводится к нахождению середин сторон – это стандартная задача.

8.4. В ряд записано 100 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что а) сумма любых семи чисел положительна? б) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

Ответ: а) обязательно; **б**) нет. См. задачу 7.4.

8.5. На шахматную доску Коля поставил 17 королей. Петя должен убрать с доски 12 королей так, чтобы оставшиеся 5 королей не били друг друга. Всегда ли он сможет это сделать? (Король бьет все клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине.)

Ответ: да. См. задачу 7.5.