«Будущие исследователи – будущее науки». Математика.
Очный отборочный тур 19.01.2013. Продолжительность - 2 часа.

7 класс

7.1. Найдите два натуральных числа m и n, если известно, что $m < n < 2m$ и $mn = 2013$.

Ответ: $m = 33$, $n = 61$.

Решение следует из разложения на простые множители $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ и небольшого перебора делителей числа 2013; всего их 8, причем «кандидатом» на роль числа m являются меньшие делители, а именно четыре числа 1, 3, 11, 33 и из них условию $m < n < 2m$ удовлетворяет только $m=33$ при $n = 61$.

7.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

Ответ: 284160. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра встречается в разряде единиц столько раз, сколько есть трехзначных чисел с этой цифрой на конце. Значит, она встретится $8 \cdot 8 = 64$ раза (т.к. всего используется 8 цифр для разрядов сотен и десятков). Поэтому сумма цифр в последнем разряде равна $64 \cdot (1+2+3+4+6+7+8+9) = 2560$. Аналогично, в разряде десятков и сотен получим ту же сумму. В итоге получим $2560 \cdot 100 + 2560 \cdot 10 + 2560 = 2560 \cdot 111 = 284160$.

7.3. Дан прямоугольник, отличный от квадрата. Известно, что площадь прямоугольника численно равна его периметру. Докажите, что меньшая сторона прямоугольника меньше 4, а большая сторона – больше 4.

Решение. Пусть a, b $(a < b)$ – стороны прямоугольника. По условию, $ab = 2a + 2b$, отсюда получаем равенство $(a-2)(b-2) = 4$. Если $a - 2 > 2$ и $b - 2 > 2$, то $(a-2)(b-2) > 4$, что противоречит полученному равенству. Аналогичное противоречие получается, когда оба числа $a - 2$ и $b - 2$ положительны, но меньше 2. Если оба числа $a - 2$ и $b - 2$ отрицательны, то $(a-2)(b-2) = (2-a)(2-b) < 2 \cdot 2 = 4$, что также невозможно. Значит, $a - 2 < 2$, $b - 2 > 2$, т.е. $a < 4$, $b > 4$.

7.4. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

Ответ: "Поровну". **Решение.** Предположим сначала, что в компании больше пяти лжецов. Тогда первые пятеро сказали правду, и значит, они рыцари. Итак, рыцарей по меньшей мере пять, и, значит, наше предположение неверно. Предположим теперь, что в компании больше пяти рыцарей. Тогда среди первой пятерки должен оказаться рыцарь, и он должен был сказать правду, а на самом деле он сказал, что больше лжецов, т.е. опять приходим к противоречию. Значит, в компании 5 лжецов и 5 рыцарей. Поскольку первые пятеро сказали неправду, то они лжецы, а остальные – рыцари, и они сказали: "Поровну".

8 класс

8.1. Стозначное натуральное число N составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что N делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа N?

Ответ: две двойки и 98 единиц. **Решение.** Если в записи числа N больше двух двоек, то рассмотрев любые три двойки, получим противоречие: действительно, между первой и второй двойкой – четное количество цифр, между второй и третьей – четное количество, а вместе с самой второй (т.е. средней) двойкой получится нечетное количество. С другой стороны, в записи числа N долж-