Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. Финальный тур 10.03.2013

7 класс

7.1. На контрольной в 7[а] было мальчиков на три человека больше, чем девочек. По результатам контрольной оказалось, что четверок было на две больше, чем пятерок, а троек – вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил двойку или единицу.

Решение. Пусть x – число пятерок, тогда всего положительных оценок $x+(x+2)+2(x+2)=4x+6$. С другой стороны, на контрольной было $2m+3$ человека, где m – число девочек. Поскольку числа $4x+6$ и $2m+3$ разной четности, они не совпадают, и значит, в классе были и плохие оценки.

7.2. Какое наименьшее количество цифр можно приписать справа к числу 2013, чтобы полученное число делилось на все натуральные числа, меньшие 10?

Ответ: три цифры. **Решение.** Наименьшее общее кратное чисел (1, 2, …,9) равно 2520. Если к 2013 приписать две цифры, то получится число не больше 201399. Разделив 201399 на 2520 с остатком, получим в остатке 2319. Поскольку 2319 > 99, то между числами 201300 и 201399 нет целого кратного 2520. Значит, приписать две цифры к 2013 нельзя. Очевидно, одну цифру тоже нельзя приписать (иначе можно было бы дописать справа еще ноль). Трех цифр будет достаточно; действительно, при делении 2013999 на 2520 в остатке получится 519, и поскольку 519<999, находим нужное число 2013999 – 519 = 2013480, кратное 2520.

7.3. Имеется 10 палочек длиной 1 (см), 2 (см), 2^2 (см),…, 2^9 (см). Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что треугольник можно сложить, и пусть 2^{n_1}, 2^{n_2}, …, 2^{n_k} – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 2^{m_1}, 2^{m_2}, …, 2^{m_l} – другую. Тогда имеем равенство $2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_k}=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_l}$. Пусть, для определенности, 2^{n_1} – наименьшая из длин всех этих палочек. Тогда, сократив равенство на 2^{n_1}, получим противоречие (в левой части стоит нечетное число, а в правой – четное).
Другой способ получить противоречие состоит в рассмотрении наибольшей из длин этих палочек, т.к. для любого n выполняется $2^n>1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

7.4. В ряд записано 100 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что **а**) сумма любых семи чисел положительна? **б**) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

Ответ: **а**) обязательно; **б**) нет. **Решение.** **а**) Пусть $a_1, a_2 \ldots a_{100}$ – данные числа. Вычислим 100 положительных сумм $S_1=a_1+a_2+\ldots+a_7$, $S_2=a_2+a_3+\ldots+a_8$, …, $S_{100}=a_{100}+a_1+\ldots+a_6$ (складываются семерки подряд идущих чисел в циклическом расположении). Тогда $S_1+S_2+\ldots+S_{100}=7S$, где S – сумма всех чисел (т.к. каждое число засчитывается в семи семерках). Поэтому $S>0$.

б) Возьмем такие числа $a_1=a_8=a_{15}=\ldots=a_{92}=a_{99}=-6$ (каждое седьмое число равно –6) и пусть остальные числа равны 1.01. Тогда в любой семерке подряд идущих чисел сумма равна $-6+1.01\cdot 6=0.06>0$, а сумма всех 100 чисел $(-6)\cdot 15+(1.01)\cdot 85=-4.15<0$.

7.5. На шахматную доску Коля поставил 17 королей. Петя должен убрать с доски 12 королей так, чтобы оставшиеся 5 королей не били друг друга. Всегда ли он сможет это сделать? (Король бьет все клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине.)

Ответ: да. **Решение.** Раскрасим доску в 4 цвета следующим образом: разобьем доску на 16 квадратиков 2×2 и каждый такой квадратик раскрасим так

1	2
3	4

(можно раскрасить угловой квадрат, а потом параллельно переносить раскраску на другие квадраты):

1	2	1	2	...
3	4	3	4	...
1	2	1	2	...
3	4	3	4	...
...	...	...	...	...

Очевидно, любые два короля, поставленные на клетки одного цвета, не бьют друг друга. У нас 17 королей и всего 4 цвета. Значит (по принципу Дирихле или рассуждая от противного), найдутся 5 королей на клетках одного цвета. Этих королей Петя и оставит на доске.