10 класс

10.1. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $|x^2-2ax+1|=a$ имеет три корня.

Ответ: $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Решение.** Очевидно, $a\ge 0$ (поскольку левая часть уравнения неотрицательна). Если дискриминант квадратного трехчлена $D=4(a^2-1)$ отрицателен, то имеем квадратное уравнение $x^2-2ax+1=a$, и, значит, у него не более двух корней. Поэтому $D\ge 0$, т.е. $a\ge 1$, и три корня наше уравнение будет иметь, когда прямая *y*=*a* касается графика $y=|x^2-2ax+1|$ в "отраженной" вершине параболы (т.е. касается графика $y=-(x^2-2ax+1)$, полученного после симметричного отражения относительно оси *Ox*). Вершина параболы имеет абсциссу *x*=*a*, значит $a=-(a^2-2a^2+1)\Leftrightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (т.к. $a\ge 1$).

10.2. Число *a* является корнем квадратного уравнения $x^2-x-50=0$. Найдите значение a^4-101a.

Ответ: 2550. **Решение.** Имеем $a^2=a+50$, поэтому $a^4=(a+50)^2=a^2+100a+2500=$ $a+50+100a+2500=101a+2550$. Отсюда $a^4-101a=2550$.

10.3. Дан прямоугольный треугольник *ABC*. На гипотенузе *AC* взята точка *M*. Пусть *K*, *L* – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *CBM* соответственно. Найдите расстояние от точки *M* до середины *KL*, если известен радиус *R* окружности, описанной около треугольника *BKL*.

Ответ: $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **Решение.** Заметим, что угол *KML* прямой, т.к. $\angle KML=\angle KMB+\angle LMB=$ $=\frac{1}{2}(\angle AMB+\angle CMB)=90^\circ$. Аналогично получаем, что $\angle KBL=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$. Тогда в треугольнике *BKL* имеем $KL=2R\cdot\sin 45^\circ=R\sqrt{2}$. Гипотенуза *KL* в прямоугольном треугольнике *KML* вдвое больше искомой медианы, откуда следует результат $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

10.4. Сколько решений в натуральных числах *x*, *y* имеет система уравнений

$$\begin{cases}\text{НОД}(x,y)=20!\\ \text{НОК}(x,y)=30!\end{cases}\quad (\text{где } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)?$$

Ответ: 2^8. **Решение.** См. задачу 9.5.

10.5. Имеется 100 палочек длины 1, 0.9, $(0.9)^2$, …, $(0.9)^{99}$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что можно сложить треугольник, и пусть 0.9^{n_1}, 0.9^{n_2}, …, 0.9^{n_k} – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 0.9^{m_1}, 0.9^{m_2}, …, 0.9^{m_l} – другую. Тогда имеем равенство

$$0.9^{n_1}+0.9^{n_2}+\ldots+0.9^{n_k}=0.9^{m_1}+0.9^{m_2}+\ldots+0.9^{m_l}.$$

Пусть, для определенности, n_1 – наименьший из показателей, входящих в равенство. Тогда, сократив равенство на 0.9^{n_1}, получим, что число 0.9 является корнем многочлена, у которого старший коэффициент и свободный член равны ± 1, а остальные коэффициенты ± 1 или 0. Но это противоречит тому факту, что рациональными корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь такие числа $\frac{p}{q}$, у которых *p* – делитель свободного члена, а *q* – делитель старшего коэффициента.