Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2011/2012
Математика. **Финальный тур**

I вариант

9 класс

9.1. Имеется набор, состоящий из *n* гирек весом 1,2,…, *n*. Можно ли все гирьки разложить на две кучи, равные по весу, если: а) *n* = 99, б) *n* = 98.

9.2. Дано сто чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 1 - \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, …, $a_{98} = \frac{1}{98} - \frac{1}{100}$. Чему равна сумма всех этих разностей?

9.3. Найдите натуральное число x, удовлетворяющее уравнению

$$x^3 = 2011^2 + 2011 \cdot 2012 + 2012^2 + 2011^3.$$

9.4. а) Докажите, что квадрат можно разбить на 40 квадратиков.

б) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении стороны квадратиков принимали лишь два значения a b, отличающиеся не более, чем на 25% (т.е. $\frac{b}{a} \le 1{,}25$).

9.5. На стороне ‘ треугольника ‘B взята точка ˋ. Оказалось, что $AM = BM$ MC и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите MA.

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2011/2012
Математика. **Финальный тур**

II вариант

9 класс

1. Доказать, что уравнение $x^2 + 3y^2=3xy - 1$ не имеет решений в действительных числах.
2. Дана окружность и пусть AB – её диаметр, AK – хорда. На прямой AB взята точка M, так что B лежит между A и M. Биссектриса угла KBM пересекает прямую AK в точке P. Доказать, что у окружности, которая проходит через точку B и касается прямой AK в точке P, центр принадлежит прямой AB.
3. а) Найти наименьшее натуральное n, для которого найдутся натуральные числа x, y, удовлетворяющие уравнению $x(x+n)=y^2$. б) Аналогичная задача для уравнения $x(x+n)=y^3$.
4. Сколько существует семизначных чисел, которые составлены из цифр 7 и 8 и делятся на 9?
5. Существует ли выпуклый 27-угольник, у которого все углы различны и выражаются целым числом градусов?