Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2011/2012
Математика. **Отборочный тур**

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

8–9 класс

8-9.1. Какое число больше: $\sqrt{2011^2+2012}+\sqrt{2012^2+2011}$ или $\sqrt{2011^2+2011}+\sqrt{2012^2+2012}$?

Ответ. Первое число больше второго.

Решение. Обозначим $a = 2011$, $b = 2012$, $A=\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}$, $B=\sqrt{a^2+a}+\sqrt{b^2+b}$. Тогда $A^2 - B^2 = 2\sqrt{a^2b^2+ab+a^3+b^3}-2\sqrt{a^2b^2+ab+ab^2+ba^2}$. Таким образом, остается сравнить числа a^3+b^3 и ab^2+ba^2. Их разность равна $(a-b)^2(a+b)>0$, т.к. $a\ne b$. Итак, $A > B$.

8-9.2. Могут ли длины медиан некоторого треугольника относиться, как 1 **:** 2 **:** 3?

Ответ. Не могут.

Решение. Результат следует из того факта, что из медиан любого треугольника можно составить треугольник, а в нашем случае длины медиан k, $2k$, $3k$ противоречат неравенству треугольника. Указанный факт можно установить, например, следующим образом. Пусть O – точка пересечения медиан данного треугольника ABC, а точка B_1 симметрична точке B относительно O. Тогда у треугольника AOB_1 длины сторон составляют $\frac{2}{3}$ от длин медиан исходного треугольника ABC. (Другое доказательство данного факта следует из равенства $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$.)

8-9.3. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ число $n^{2012}+4$ составное.

Решение. Поскольку $n^{2012}+4=\left(n^{1006}\right)^2+4n^{1006}+4-4n^{1006} = \left(n^{1006}+2\right)^2-\left(2n^{503}\right)^2 = \left(n^{1006}+2-2n^{503}\right)\left(n^{1006}+2+2n^{503}\right)$. При $n > 1$ обе скобки больше единицы, откуда следует результат.

8-9.4. В треугольнике ABC известны углы $\angle A = 20°$, $\angle C = 40°$ и сторона $BC = 1$. На стороне AC взята точка M такая, что $AM = 1$. Найдите длину отрезка BM.

Ответ. 1.

Решение. Покажем, что $BM = BC$. Для этого проведем окружность радиуса 1 с центром в точке B и рассмотрим точку M_1 пересечения этой окружности с отрезком AC (отличную от C). Мы покажем, что M_1 совпадает с M. Поскольку $\angle BM_1C = 40°$, то по свойству внешнего угла, $\angle ABM_1 = 40° - 20° = 20°$ и поэтому $\Delta\, ABM_1$ – равнобедренный: $AM_1 = BM_1 = 1$ и M_1 совпадает с M.

8-9.5. Двадцатизначное натуральное число состоит из десяти пятёрок и десяти четвёрок (в некотором порядке). Докажите, что в этом числе можно подчеркнуть десять цифр подряд так, чтобы подчеркнутое число делилось на 9.

Решение. Требуется подчеркнуть 10-значное число, у которого поровну пятерок и четверок. Рассмотрим первые десять цифр данного числа. Если в нем разное количество пятерок и четверок, то обозначим их разность через $t = t_1$. Очевидно, t четно. Далее рассмотрим 10 цифр со 2-й по 11-ю, т.е сдвинемся на одну цифру. При этом величина $t = t_2$ либо останется той же самой, либо изменится на 2 (станет больше или меньше). После десяти сдвигов мы будем иметь число из последних десяти цифр, у которого величина $t = t_{11}$ отличается только знаком от $t = t_1$ (т.к. в 20-значном числе поровну пятерок и четверок). Значит, при некотором сдвиге мы должны были пройти через 0 (т.е. $t = t_k = 0$ для некоторого $k < 11$). Такой сдвиг и дает искомое 10-значное число.