11 класс.

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2 = 4xy + 3$.

Решение. См. задачу 10.1

11.2. Докажите неравенство $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{2} > |a+1|$.

Решение. Неравенство нетрудно доказать алгебраически, дважды избавляясь от корней при возведении в квадрат. Однако проще доказать его геометрически, рассмотрев точки $A(-a;0)$, $B(0;1)$ и $C(1;0)$ на координатной плоскости. Тогда неравенство запишется в виде $AB + BC > AC$.

11.3. Дан треугольник ABC, точка O – центр вписанной в него окружности. Докажите, что $R_{BOC} < 2R_{ABC}$, где R_{BOC} и R_{ABC} – радиусы описанных около треугольников BOC и ABC окружностей.

Решение. При решении задачи 10.3 мы получили $R_{ABC}\sin\alpha = R_{BOC}\cos\frac{\alpha}{2}$ Отсюда $R_{BOC} = 2R_{ABC}\sin\frac{\alpha}{2} \le 2R_{ABC}$, причем неравенство на самом деле строгое, т.к. иначе мы бы имели $\frac{\alpha}{2} = 90°$, т.е. $\alpha = 180°$.

11.4. Найдите область определения функции $y = \sqrt{2\cos(\cos x) - 1}$.

Ответ. $(-\infty,+\infty)$.

Решение. Для нахождения области определения требуется решить неравенство $\cos(\cos x) \ge \frac{1}{2}$. Поскольку $-1 \le \cos x \le 1$ для любого x, и $1 < \frac{\pi}{3}$, то, воспользовавшись свойствами функции $\cos x$ (четностью и монотонным убыванием в первой четверти), будем иметь: $\cos\frac{\pi}{3} < \cos(\cos x) \le 1$ при всех x, т.е. $\cos(\cos x) > \frac{1}{2}$.

11.5. а) Даны произвольные десять целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа так, чтобы разность их кубов делилась на 27. б) Справедливо ли аналогичное утверждение для произвольных восьми целых чисел?

Ответ. б) Справедливо.

Решение. См. задачу 10.5