10 класс.

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2 = 4xy + 3$.

Решение. Данное уравнение приведем к эквивалентному: $(2xy-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2xy = 1 \pm 2$. Таким образом, искомое множество точек состоит из двух гипербол $y = \frac{3/2}{x}$ и $y = \frac{-1/2}{x}$ (в каждом квадранте будет по одной ветви соответствующей гиперболы).

10.2. Найдите все значения параметра *b*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ ax + y = ab \end{cases}$$

имеет решение при любом *a*.

Ответ. $0 \le b \le 2$.

Решение. На координатной плоскости первое уравнение представляет собой окружность *S*: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ радиуса 1 с центром в точке (1;0). Второе уравнение – это уравнение прямой *l*, проходящей через точку *M*(*b*;0) с угловым коэффициентом *a*. Если точка *M* лежит внутри *S* (т.е. при $0 \le b \le 2$), то прямая *l* при любом наклоне *a* пересечет окружность *S*. Если же *M* лежит вне *S*, то всегда можно найти достаточно большой по абсолютной величине наклон *a*, при котором *l* не пересекается с *S*.

10.3. Дан треугольник *ABC,* точка *O* – центр вписанной в него окружности. Найдите угол *A*, если известно, что радиусы описанных окружностей треугольников *ABC* и *BOC* совпадают.

Ответ. 60°.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$. Заметим, что $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$; действительно,

$\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle BCO) = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$BC = 2R_{ABC}\sin\alpha = 2R_{BOC}\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 2R_{BOC}\cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \qquad \sin\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 30°.$$

10.4. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$. Найдите область определения функции $y = f(f(x))$.

Ответ. $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

Решение. Имеем $y = \sqrt{u^2 - u}$, где $u = \sqrt{x^2 - x}$. Для нахождения области определения нужно решить неравенство $u^2 - u \ge 0 \Leftrightarrow u \le 0$ или $u \ge 1$.

В первом случае имеем $\sqrt{x^2 - x} \le 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1$.

Во втором случае $\sqrt{x^2-x}\ge 1 \Leftrightarrow x^2-x\ge 1 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)\ge 0$, где $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ – корни уравнения $x^2-x-1=0$. Получаем $x\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

10.5. а) Даны произвольные десять целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа так, чтобы разность их кубов делилась на 27. б) Справедливо ли аналогичное утверждение для произвольных восьми целых чисел?

Ответ. б) Справедливо.

Решение. а) Из десяти чисел найдутся два числа a, b, дающие одинаковые остатки при делении на 9. Тогда $a^3-b^3=(a-b)\left((a-b)^2+3ab\right)$. Здесь первый множитель делится на 9, а второй на 3, откуда следует результат.

б) Если среди остатков при делении на 9 данных восьми чисел есть совпадающие, то этот случай уже рассмотрен в пункте а). Если же все данные 8 чисел дают разные остатки при делении на 9, то из всех возможных остатков пропущен ровно один, и значит, среди трех остатков $\{0,3,6\}$ присутствуют по меньшей мере два. Возьмем два числа a, b, имеющие эти остатки, тогда сами эти числа делятся на 3, а их кубы – на 27.