9 класс

9.1. Имеется набор, состоящий из *n* гирек весом 1,2,…, *n*. Можно ли все гирьки разложить на две кучи, равные по весу, если: а) $n = 99$, б) $n = 98$.

Ответ. а) Можно; б) нельзя.

Решение. См. решение задачи 7.4. Пункт б) следует (как и в задаче 7.4(а)) из нечетности общего веса всех гирек. Пункт а) (так же, как и в задаче 7.4(б)) следует из того, что 99 = 1 + 98, а количество всех последовательных чисел от 2 до 97 делится на 4.

9.2. Дано сто чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 1 - \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, …, $a_{98} = \frac{1}{98} - \frac{1}{100}$. Чему равна сумма всех этих разностей?

Ответ. 14651/9900. **Решение**.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} = \left(1-\frac{1}{\underset{\sim}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\underset{\approx}{4}}\right)+\left(\frac{1}{\underset{\sim}{3}}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{\underset{\approx}{4}}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\underline{97}}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{\underline{\underline{98}}}-\frac{1}{100}\right)$$

Подчеркнутые члены при подсчете суммы взаимно уничтожаются с соответствующими членами, имеющими противоположный знак. Останутся не уничтоженными числа

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{14651}{9900}.$$

9.3. Найдите натуральное число x, удовлетворяющее уравнению

$$x^3 = 2011^2 + 2011 \cdot 2012 + 2012^2 + 2011^3.$$

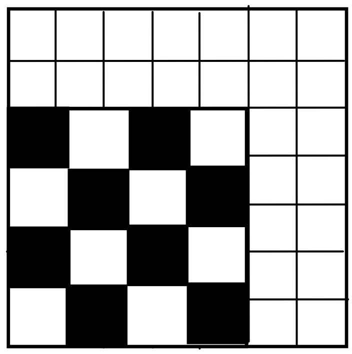
Ответ. 2012.

Решение. См. задачу 8.4.

9.4. а) Докажите, что квадрат можно разбить на 40 квадратиков.

б) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении стороны квадратиков принимали лишь два значения $a < b$, отличающиеся не более, чем на 25% (т.е. $\frac{b}{a} \le 1{,}25$).

Ответ. б) Можно. **Решение**. а) Можно привести различные варианты разбиений. Например, разобьем сначала квадрат на 25 квадратиков со стороной 1/5 (без ограничения общности считаем исходный квадрат единичным), затем берем 5 квадратиков этого разбиения и разбиваем каждый из них на 4 квадрата. Итого получим 20 квадратиков со стороной 1/5 и еще 20 квадратиков со стороной 1/10.



б) См. рисунок. Сначала рассмотрим разбиение квадрата на квадратики со стороной 1/7. От этого разбиения оставим только внешнюю каемку из двух слоев, а квадрат со стороной 5/7 (который представляет собой исходный квадрат, если от него отрезать эту каёмку) разобьем по-другому, а именно на 16 квадратиков со стороной (5/7)::4 = 5/28 (на рисунке эти квадратики раскрашены в шахматном порядке). В результатате получим 13 + 11 + 16 = 40 квадратиков. Для них b = 5/28, a = 1/7 и b/ a = 1,25.

Замечание. Можно привести рассуждения, как построить подобный пример. Пусть сначала квадрат разбивается на n^2 квадратиков со стороной $1/n$. Из этого разбиения оставляем каемку, состоящую из l слоев, т.е. оставляем $(2n-1)+(2n-3)+\ldots+(2n-(2l-1)) = n^2 - (n-l)^2$ квадратиков. Остальную часть исходного квадрата разбиваем по-другому, а именно, на m^2 квадратиков со стороной $\frac{n-l}{nm}$. Таким образом, имеем уравнение $n^2 - (n-l)^2 + m^2 = 40$. Обозначим $k = n - l$. Отношение сторон разных квадратиков равно $\frac{k}{m}$. Нужно сделать величину k достаточно близкой к m (и обе эти величины нужно сделать достаточно большими). Положив $k - m = 1$, получим $n^2 = 40 + k + m$. Взяв $n = 7$ (первое число, квадрат которого больше 40), получим $k + m = 9$, и тогда $k = 5$, $m = 4$, как в нашем примере.

9.5. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Оказалось, что $AM = BM + MC$ и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите $\angle BMA$.

Ответ. 60°.**Решение**. Вначале покажем, что треугольник ABC – равнобедренный. Действительно, это следует из условия $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$ и свойства внешнего угла: $\angle BMA = \angle MBC + \angle BCA$. Из этих двух равенств имеем $\angle BCA = \angle BAC$. Далее, возьмем на стороне AC точку K, симметричную точке M относительно середины AC. Тогда $AK = MC$ и поэтому из соотношения $AM = BM + MC$ следует, что точка M лежит между C и серединой AC и значит, это соотношение запишется в виде $KM = BM$. Поскольку $\Delta\, ABC$ – равнобедренный, середина AC совпадает с проекцией точки B, и поэтому $BM = BK$. Таким образом, в треугольнике KBM все стороны равны, а все углы равны по 60°.

РЕШЕНИЯ 2 вариант

9 класс

1. Уравнение привести к виду

$$\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2=-1-\frac{3}{4}y^2$$

2. Через точку *P* провести перпендикуляр к прямой *AK*. Доказать, что точка пересечения этого перпендикуляра с прямой *AB* равноудалена от точек *P* и *B*.
3. а) При $n=3$ такие x и y существуют: $x=1,\ y=2$.

Невозможность значений $n=1$ и $n=2$ следует из неравенств

$x^2<x(x+1)<(x+1)^2$ $\quad$ $x^2<x(x+2)<(x+1)^2$ **Ответ: *n*=3.**

б) При $n=2$ такие x и y существуют: $x=2,\ y=2$. При $n=1$ из уравнения $x(x+1)=y^3$ следует, что два последовательных натуральных числа x и $(x+1)$ являются кубами натуральных чисел (т.к. x и $(x+1)$ - взаимно простые числа), что невозможно. **Ответ: *n*=2.**

4. См. указания к задаче 3 б) (8 класс).

5. См. указания к задаче 5 (8 класс).