8 класс

8.1. Биссектриса угла ABC составляет с его сторонами угол, который в три раза меньше, чем смежный к углу ABC. Найдите величину угла ABC.

Ответ. $72°$.

Решение. См. решение задачи 7.2.

8.2. Является ли данное число N простым или составным, если:

а) $N = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + 1$; б) $N = 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 1$?

Ответ. а) Составным; б) составным. **Решение**. а) См. решение задачи 7.1. Более общее решение следует из пункта б).

б) Для любого натурального числа n имеем:

$$N = \left((n+1)(n+2)\right)(n(n+3)) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = M(M+2) + 1 = (M+1)^2,$$

где $M = n^2 + 3n$. Таким образом, число N – составное.

8.3. Натуральное число назовем любопытным, если после вычитания из него суммы его цифр получится число, состоящее из одинаковых цифр. Сколько всего существует: а) трехзначных любопытных чисел?; б) четырехзначных любопытных чисел?

Ответ. а) 30 чисел; б) 10 чисел. **Решение**. а) см. решение задачи 7.3.

б) Пусть $\overline{txyz}$ – любопытное четырехзначное число. Рассуждая аналогично решению задачи 7.3, получим, что число A может равняться 999, а другие два случая невозможны (т.к. числа 3333 и 6666 не делятся на 9). Итак, $A = 9(111x + 11y + z) = 999$. Отсюда $x = 1$, $y = z = 0$. В результате имеем 10 любопытных чисел: 1000, 1001, …, 1009.

8.4. Найдите натуральное число x, удовлетворяющее уравнению

$$x^3 = 2011^2 + 2011 \cdot 2012 + 2012^2 + 2011^3.$$

Ответ. 2012. **Решение**. Обозначим $a = 2011$, $b = 2012$. Тогда $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b - a} = b^3 - a^3$ (т.к. $b - a = 1$). Таким образом, $x^3 = b^3 - a^3 + a^3 = b^3$. Отсюда $x = b = 2012$.

8.5. В компании собралось 11 человек. Оказалось, что каждый дружит не менее, чем с шестью присутствующими. Докажите, что в этой компании найдутся три друга (каждый дружит с двумя остальными).

Решение. См. решение задачи 7.5.

РЕШЕНИЯ 2 вариант

7-8 классы

1. Пусть x – первая цифра, y – трехзначное число, полученное после зачеркивания первой цифры. Тогда $1000x + y = 3y + 8$. Отсюда легко получить, что x равен либо 1, либо 2. Тогда $x = 1,\ y = 496$ или $x = 2,\ y = 996$. **Ответ: 1) 1496, 2) 2996.**

2. Пусть $\angle BAK = \angle NAC = x,\ \angle KAN = y.$ В результате подсчета углов из условий задачи получается $x + y = 60^\circ$.

3. а) Пусть x - количество семерок. Тогда $7x + 8(8 - x)$ должно быть кратно девяти. Это возможно лишь при $x = 1$. **Ответ: 8.**

   б) Аналогично получаем, что в числе две семерки и пять восьмерок. Если левая семерка стоит в старшем разряде, то правая семерка может занимать 6 различных позиций, если левая семерка стоит в следующем разряде, то правая семерка может занимать 5 различных позиций и т.д.

   Итого 6+5+4+3+2+1=21 вариант. **Ответ: 21.**

4. Каждый ученик может набрать от нуля до 35 баллов. Если в каждой параллели ученики набрали разное количество баллов, то всего учеников должно быть не более $36 \times 4 = 144$. Получили противоречие.

5. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360°. Если все углы 27-угольника различны, то сумма внешних углов не меньше

$$1^\circ + 2^\circ + \ldots + 27^\circ = 378^\circ > 360^\circ.$$

Ответ: не существует.