Решения, 1 вариант

7 класс

7.1. Дано число $N = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + 1$. Каким является это число: простым или составным?

Ответ. Составным. **Решение**. Последняя цифра числа N равна последней цифре числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$, т.е. равна 5. Значит, N делится на 5. (Другое, более общее решение см. в задаче 8.2.)

7.2. Биссектриса угла ABC составляет с его сторонами угол, который в три раза меньше, чем смежный к углу ABC. Найдите величину угла ABC.

Ответ. 72°. **Решение**. Пусть x – градусная мера угла ABC. Из условия задачи получаем уравнение $\frac{x}{2} = \frac{180 - x}{3} \Leftrightarrow 5x = 360 \Leftrightarrow x = 72$ (градуса).

7.3. Натуральное число назовем любопытным, если после вычитания из него суммы его цифр получится число, состоящее из одинаковых цифр. Сколько всего существует трехзначных любопытных чисел?

Ответ. 30 чисел. **Решение**. Пусть $\overline{xyz}$ – любопытное трехзначное число. Тогда число

$$A = \overline{xyz} - (x + y + z) = 100x + 10y + z - (x + y + z) = 9(11x + y)$$

делится на 9 и состоит из одинаковых цифр, причем $100 - 27 \le A \le 999 - 1$. Таким образом, A может равняться либо 99, либо 333, либо 666.

В случае $A = 99$ имеем $11x + y = 11$, тогда $x = 1$, $y = 0$, z – любая цифра, т.е. в этом случае есть 10 любопытных чисел: 100, 101, …, 109.

В случае $A = 333$ получаем $11x + y = 37$, тогда последовательно определяем цифры: $x = 3$, $y = 4$, z – любая цифра, т.е. и в этом случае есть 10 любопытных чисел.

В случае $A = 666$ имеем $11x + y = 74$, и тогда $x = 6$, $y = 8$, z – любая цифра, опять имеем 10 любопытных чисел.

7.4. Имеется набор, состоящий из n гирек весом 1, 2,…, n (граммов). Можно ли все гирьки разложить на две кучи, равные по весу, если: а) $n = 30$, б) $n = 31$.

Ответ. а) Нельзя; б) можно. **Решение**. а) Общий вес всех гирек нечетный, т.к. количество гирек нечетного веса – нечетное число (это 15 гирек весом 1, 3, 5, …, 29). Значит, на две кучи, равные по весу, гирьки разложить нельзя.

б) Сначала положим в левую кучу гирьку 31, а в правую – две гирьки 1 и 30. Имеем равенство: 31 = 30 + 1. Осталось 28 гирек. Далее положим в левую кучу 2 гирьки 2 и 29, а в правую – 3 и 28, их суммы также одинаковы. И так далее: будем класть в левую и правую кучи по две гирьки, по весу равноотстоящие от концов (т.е. от 2 и 29):

$$4 + 27 = 5 + 26, \ldots, 14 + 17 = 15 + 16.$$

В результате вес левой кучи будет равен $31 + 31 \cdot 7 = 248$ (гр), и тот же вес будет у правой кучи.

7.5. В компании собралось 11 человек. Оказалось, что каждый дружит не менее, чем с шестью присутствующими. Докажите, что в этой компании найдутся три друга (каждый дружит с двумя остальными).

Решение. Возьмем любых двух друзей A и B. Из остальных девяти человек A имеет не менее 5 друзей, и B имеет не менее 5 друзей. Значит, среди друзей A и B есть хотя бы один общий (в противном случае было бы $5 + 5 \le 9$). Вместе с A и B этот общий друг составляет нужную тройку друзей.

РЕШЕНИЯ 2 вариант

7-8 классы

1. Пусть x – первая цифра, y – трехзначное число, полученное после зачеркивания первой цифры. Тогда $1000x + y = 3y + 8$. Отсюда легко получить, что x равен либо 1, либо 2. Тогда $x = 1,\ y = 496$ или $x = 2,\ y = 996$. **<u>Ответ: 1) 1496, 2) 2996.</u>**

2. Пусть $\angle BAK = \angle NAC = x,\ \angle KAN = y.$ В результате подсчета углов из условий задачи получается $x + y = 60^\circ$.

3. а) Пусть x - количество семерок. Тогда $7x + 8(8 - x)$ должно быть кратно девяти. Это возможно лишь при $x = 1$. **<u>Ответ: 8.</u>**

б) Аналогично получаем, что в числе две семерки и пять восьмерок. Если левая семерка стоит в старшем разряде, то правая семерка может занимать 6 различных позиций, если левая семерка стоит в следующем разряде, то правая семерка может занимать 5 различных позиций и т.д.

Итого 6+5+4+3+2+1=21 вариант. **<u>Ответ: 21.</u>**

4. Каждый ученик может набрать от нуля до 35 баллов. Если в каждой параллели ученики набрали разное количество баллов, то всего учеников должно быть не более $36 \times 4 = 144$. Получили противоречие.

5. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360°. Если все углы 27-угольника различны, то сумма внешних углов не меньше

$$1^\circ + 2^\circ + \ldots + 27^\circ = 378^\circ > 360^\circ.$$

<u>Ответ: не существует</u>.