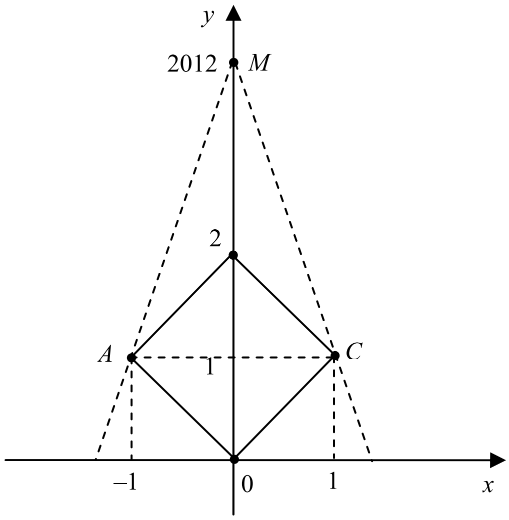
10 класс

10.1. Дано сто чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 1 - \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, …, $a_{98} = \frac{1}{98} - \frac{1}{100}$. Чему равна сумма всех этих разностей?

Ответ. 14651/9900. **Решение**. См. задачу 9.2.

10.2. Найдите все значения параметра a, при каж- каж-дом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y-1| = 1 \\ y = a \cdot x + 2012 \end{cases}$ имеет единственное решение.



Ответ. $a = \pm 2011$. **Решение**. Начертим на ди- натной плоскости множество решений первого уравнения. Это граница квадрата (см. рис.). Пря- мая, изображающая второе уравнение, проходит через точ- ку $M(0;\ 2012)$. Значит, условие единственности ре- шения будет удовлетворяться только тогда, когда эта прямая проходит либо через точку $A(-1;1)$, либо через точку $C(1;1)$. Значит, угловой коэффициент пря- мой равен ± 2011.

10.3. а) Докажите, что квадрат можно разбить на 40 квадратиков.

б) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении стороны квадратиков принимали лишь два значения $a < b$, отличающиеся не более, чем на 25% (т.е. $\frac{b}{a} \le 1{,}25$).

Ответ. б) можно. **Решение**. См. решение задачи 9.4.

10.4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Оказалось, что $AM = BM + MC$ и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите $\angle BMA$.

Ответ. 60°. **Решение**. См. решение задачи 9.5.

10.5. Могут ли величины углов четырехугольника, вписанного в окружность, представлять собой (в некотором порядке): а) арифметическую прогрессию с ненулевой разностью; б) геометрическую прогрессию со знаменателем, отличным от единицы.

Ответ. а) Могут; б) не могут. **Решение**. а) Можно взять углы четырехугольника, равные α, 2α, 3α, 4α (в некотором порядке), где $\alpha = 36°$. Если взять четырехугольник $ABCD$ с углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 4\alpha$, $\angle D = 3\alpha$, то сумма противоположных углов равна $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 5\alpha = 180°$, и, значит, около $ABCD$ можно описать окружность.

б) Предположим, от противного, что такой четырехугольник существует. Тогда его углы равны b, bq, bq^2, bq^3 для некоторых значений $b > 0$ и $q \ne 1$. Можно без ограничения общности считать, что $q > 1$ (иначе перепишем углы в обратном порядке). Тогда (учитывая возрастание членов последовательности) имеем единственно возможное уравнение для углов $b + bq^3 = bq + bq^2 = 180$. Отсюда $(1 + q)(1 - q + q^2) = q(1 + q) \Leftrightarrow 1 - q + q^2 = q \Leftrightarrow$
$(1 - q)^2 = 0 \Leftrightarrow q = 1$. Получили противоречие.

10 класс

1. а) Если $x+y=0$, то из уравнения следует $x=y=0$. Если $x+y\neq 0$, то домножим данное уравнение на $x+y$ и получим равносильное ему уравнение $x^5+y^5=0$ или $x+y=0$ - противоречие. **<u>Ответ: $x=y=0$.</u>**

б) Если $x+y=0$, то $5x^4=-1$ - решений нет. Если $x+y\neq 0$, то то домножим данное уравнение на $x+y$ и получим равносильное ему уравнение $x^5+y^5=-(x+y)$. Если $x>-y$, то $x^5>-y^5$, что противоречит последнему равенству. Аналогично, невозможно и неравенство $x<-y$. **<u>Ответ: решений нет.</u>**

2. Отразим точку M симметрично относительно всех сторон прямоугольника. Полученные четыре точки являются вершинами четырехугольника, стороны которого содержат точки A, B, C и D, длины этих сторон равны $2a, 2b, 2c, 2d$, а площадь четырехугольника вдвое больше площади прямоугольника ABCD. После выполнения гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ получим искомый четырехугольник
3. См. указание к задаче 3 а) (9 класс).
4. См. указание к задаче 4 (8 класс).
5. Разобьем каждую сторону треугольника ABC на 45 равных частей и проведем через точки разбиения прямые параллельные сторонам треугольника ABC. В результате треугольник ABC разобьется на 45^2 равных треугольников, подобных исходному. Т.к. $45^2>2012$, то среди треугольников разбиения найдется треугольник $A'B'C'$, внутри которого нет отмеченных точек. Т.к. площадь каждого треугольника разбиения равна $\frac{2012}{45^2}>0{,}99$, то, очевидно, внутри треугольника $A'B'C'$ найдется треугольник площади 0,99.